Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
29.06.2020
Blatt 10

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 37. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das kanonische Orthonormalsystem in l^2 (vgl. Aufgabe 30).

(a) Berechnen Sie $\|e_n - e_m\|$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und begründen Sie, dass (e_n) keinen Häufungspunkt hat.

(b) Zeigen Sie, dass die *Einheitskugel* $\mathbb{B} \subseteq l^2$, d.h.: $\mathbb{B} = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$, zwar abgeschlossen und beschränkt in l^2 ist, nicht aber kompakt.

Lösungsvorschlag. Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\|e_n - e_m\|^2 &= \langle e_n - e_m, e_n - e_m\rangle \\ &= \langle e_n, e_n\rangle - \langle e_n, e_m\rangle - \langle e_m, e_n\rangle + \langle e_m, e_m\rangle \\ &= \langle e_n, e_n\rangle - 2\langle e_n, e_m\rangle + \langle e_m, e_m\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & n = m, \\ 2 & n \neq m. \end{cases}\end{aligned}$$

Folglich ist für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|e_n - e_m\| = \begin{cases} 0 & n = m, \\ \sqrt{2} & n \neq m. \end{cases}$$

Ein Punkt $x \in l^2$ ist ein Häufungspunkt von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.[1] Für jede solche Folge gilt aber, dass $\|e_{n_k} - e_{n_l}\| = \sqrt{2}$ falls $k \neq l$ ist, denn $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist strikt monoton und somit gilt mit $k \neq l$ auch $n_k \neq n_l$. Also hat $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Teilfolge, die eine Cauchyfolge ist, und kann somit keinen Häufungspunkt besitzen. Hiermit folgt auch Teil (b), denn: $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge im Einheitsball $\mathbb{B} \subset l^2$, die keine konvergente Teilfolge hat. Insbesondere kann $\mathbb{B}$ also nicht folgenkompakt sein. Da für metrische Räume Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent sind, ist $\mathbb{B}$ nicht kompakt. Allerdings ist $\mathbb{B}$ per Definition beschränkt und wegen $\mathbb{B} = \|\cdot\|^{-1}([0,1])$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung (der Norm) auch abgeschlossen.

Aufgabe 38. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Teilmenge, die nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ gibt, die ihr Infimum nicht annimmt. (Hinweis: Unterscheiden

[1] Beachte, dass in der Definition von Teilfolgen gefordert wird, dass die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strikt monoton wachsend ist!

Sie die Fälle, wo X nicht beschränkt und X nicht abgeschlossen ist und wählen Sie für f eine geeignete Abstandsfunktion.)

Lösungsvorschlag. Wir unterscheiden wie vorgegeben zwei Fälle.

Fall 1: Angenommen X ist nicht abgeschlossen. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die gegen ein $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ konvergiert. Wir definieren nun

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x - y\|.$$

Die Funktion f ist strikt positiv da $y \notin X$ und

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0.$$

Somit ist $\inf_{x\in X} f(x) = 0$ aber f nimmt sein Infimum nicht an, da es eine strikt positive Funktion ist.

Fall 2: Angenommen X ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, so dass $\|x_n\| \to +\infty$. Wir definieren jetzt

$$f\colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|}.$$

Dann ist f strikt positiv und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \|x_n\|} = 0.$$

Somit ist $\inf_{x\in X} f(x) = 0$ aber f nimmt sein Infimum nicht an, da es eine strikt positive Funktion ist.

Aufgabe 39. (a) Berechnen Sie die Gradienten von $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0.0)\} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = y \cdot \sqrt{2x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = x \cdot \exp(x^2 - y^2).$$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für alle zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f, g\colon G \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\triangle(f \cdot g) = \triangle(f) \cdot g + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g) \rangle + f \cdot \triangle(g).$$

Lösungsvorschlag. Es gilt für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \cdot \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + y^2}} \\
&= \frac{2xy}{\sqrt{2x^2 + y^2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sqrt{2x^2 + y^2} + y \cdot \frac{2y}{2\sqrt{2x^2 + y^2}} \\
&= \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{2x^2 + y^2}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{\sqrt{2x^2+y^2}} \\ \frac{2x^2+2y^2}{\sqrt{2x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

Ähnlich ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \exp(x^2-y^2) + x \cdot 2x \cdot \exp(x^2-y^2) \\ &= \left(1+2x^2\right)\exp(x^2-y^2) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -2xy \cdot \exp(x^2-y^2). \end{aligned}$$

Also ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{grad}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2x^2)\exp(x^2-y^2) \\ -2xy \cdot \exp(x^2-y^2) \end{pmatrix}.$$

Für Teil (b) stürzen wir uns ohne Umschweife in die Rechnung:

$$\begin{aligned} \Delta(f\cdot g) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(f\cdot g) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)\cdot g + f\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f\right)\cdot g + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right) + f\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f\right)\cdot g + 2\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}f\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}g\right) + \sum_{i=1}^n f\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}g\right) \\ &= \Delta(f)\cdot g + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + f\cdot\Delta(g). \end{aligned}$$

Aufgabe 40. Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar aber in $(0,0)$ unstetig ist:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ für } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Lösungsvorschlag. Wie immer für abschnittweise definierte Funktionen überprüfen wir die partielle Differenzierbarkeit separat auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und in $(0,0)$. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kann f geschrieben werden als

$$f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

wobei h_1 und h_2 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} h_1 &\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x, \\ h_2 &\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto y. \end{aligned}$$

Da h_1 und h_2 partiell differenzierbar sind und $h_1^2 + h_2^2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nirgends verschwindet, folgt wie gewohnt mit der eindimensionalen Produkt-, Ketten- und Quotientenregel, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar ist. Es bleibt also noch zu prüfen, was in $(0,0)$ passiert. Dazu beachten wir, dass

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h \cdot 0}{h^2 + 0} = 0, \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{0 \cdot h}{0 + h^2} = 0. \end{aligned}$$

Diese spektakuläre Rechnung zeigt, dass f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist. Allerdings ist f in $(0,0)$ nicht stetig, denn für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f((0,0)) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$