Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
06.07.2020
Blatt 11

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 41 Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(0,0) = 0$ und für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie $D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$. Was kann man über die Stetigkeit von D_1D_2f und D_2D_1f aussagen?

Lösungsvorschlag.

(i) Wir untersuchen zunächst die einmalige partielle Differenzierbarkeit von f und gehen wie in Aufgabe 40 abschnittsweise vor. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ können wir f schreiben als

$$f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} = \mathrm{pr}_1\mathrm{pr}_2\frac{\mathrm{pr}_1^2 - \mathrm{pr}_2^2}{\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2}$$

wobei $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ wieder gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x \\ \mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto y \end{aligned}$$

Da die Koordinatenprojektionen pr_1 und pr_2 partiell differenzierbar sind und $\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2$ auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nirgends verschwindet, folgt wieder mit Ketten-, Produkt- und Quotientenregel, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Zusammensetzung partiell differenzierbarer Funktionen partiell differenzierbar ist. Für die partiellen Ableitungen gilt für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y\frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y\frac{x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} + y\frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$D_2f(x,y) = x\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

wobei die zweite Rechnung analog zur ersten verläuft. Die partielle Differenzierbarkeit bei $(0,0)$ ergibt sich aus

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot 0}{h} \frac{h^2 - 0}{h^2 + 0} = 0$$
$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot h}{h} \frac{0 - h^2}{0 + h^2} = 0$$

(ii) Um nun die zweimalige partielle Differenzierbarkeit zu zeigen, müssen wir noch zeigen, dass $D_1 f$ und $D_2 f$ beide partiell differenzierbar sind. Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ folgt das wieder aus Ketten-, Produkt- und Quotientenregel, da $(\mathrm{pr}_1^2 + \mathrm{pr}_2^2)^2$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nirgends verschwindet. Bei $(0,0)$ hingegen gilt

$$D_1 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(h,0) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \frac{h^4 + 4 \cdot h^2 \cdot 0^2 - 0^4}{(h^2 + 0^2)^2} = 0$$
$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \frac{0^4 + 4 \cdot 0^2 \cdot h^2 - h^4}{(0^2 + h^2)^2} = -1$$
$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \frac{h^4 - 4 \cdot h^2 \cdot 0^2 - 0^4}{(h^2 + 0^2)^2} = 1$$
$$D_2 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(0,h) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \frac{0^4 - 4 \cdot 0^2 \cdot h^2 - h^4}{(0^2 + h^2)^2} = 0$$

Es existieren also auch alle Ableitungen bei $(0,0)$ und insgesamt folgt, dass f zweimal partiell differenzierbar ist.

(iii) Wie in (ii) gesehen gilt

$$D_2 D_1 f(0,0) = -1 \neq 1 = D_1 D_2 f(0,0)$$

Da aber $\mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, folgt aus dem Satz von Schwarz, dass f nicht zweimal stetig differenzierbar sein kann, da sonst die zweiten partiellen Ableitungen überall vertauschbar wären. Das heißt mindestens eine der zweiten partiellen Ableitungen $D_1 D_1 f$, $D_2 D_1 f$, $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_2 f$ ist nicht stetig. Eine genauere Untersuchung des Beweises des Satzes von Schwarz zeigt, dass für den Beweis von

$$D_2 D_1 f(0,0) = D_1 D_2 f(0,0)$$

neben der zweimaligen partiellen Differenzierbarkeit von f nur die Stetigkeit von $D_2 D_1 f$ und $D_1 D_2 f$ in $(0,0)$ benötigt wird, also muss mindestens eine der Funktionen $D_2 D_1 f$ und $D_1 D_2 f$ unstetig in $(0,0)$ sein. Genauere Untersuchung[1] zeigt, dass hier sogar beide unstetig sind.

Definition. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet, $x_0 \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $f \colon G \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Es heißt dann f *in x_0 in Richtung v differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + tv) - f(x_0))$$

[1] Man kann sich das aus der symmetrischen Struktur klarmachen, da sich die Ableitungen hier im Wesentlichen nur durch Vorzeichen unterscheiden.

existiert und es wird dann $D_v f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ *die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v* genannt.

Aufgabe 42 (a) Sei nun $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, wie immer) in $x_0 \in G$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass f dann in x_0 in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und es gilt: $D_v f(x_0) = Df(x_0)v$.

(b) Betrachten wir nun die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = 1$, falls $x > 0$ und $y = x^2$ ist, sowie $f(x,y) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ in jede Richtung differenzierbar aber f nicht stetig in $(0,0)$ ist. Kann f da noch total differenzierbar in $(0,0)$ sein?

Lösungsvorschlag.

(a) Nach Voraussetzung ist f in x_0 total differenzierbar. D.h. es gibt eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ mit $B_\delta(x_0) \subseteq G$ und eine Funktion $\varphi\colon B_\delta(0) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$$

sodass für alle $h \in B_\delta(0)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \varphi(h)$$

Seien also A, δ und φ so. Und sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (der Fall $v = 0$ ist offensichtlich). Sei weiter $t \in \mathbb{R}$ so, dass $tv \in B_\delta(0)$. Dann ist insbesondere

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(tv)}{|t| \cdot \|v\|} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(tv)}{\|tv\|} = 0$$

und damit auch

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(tv)}{t \cdot \|v\|} = 0$$

sowie

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + tAv + \varphi(tv)$$

bzw. im Fall $t \neq 0$

$$\frac{1}{t}\left(f(x_0 + tv) - f(x_0)\right) = Av + \frac{\varphi(tv)}{t} \tag{1}$$

Der Grenzwert t gegen 0 des Terms auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Gleichung (1) existiert wegen der Grenzwertsätze, denn in unserem Kontext ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(tv)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\|v\| \cdot \frac{\varphi(tv)}{t\|v\|} \right) = 0$$

und $\lim_{t \to 0}(Av) = Av$ sowieso. Deshalb existiert auch der Grenzwert des Terms auf der Linken, und es gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + tv) - f(x_0)\right) = Av$$

Dies zeigt, dass alle Richtungsableitungen existieren. Folgen wir nun noch unseren notationellen Konventionen so gilt

$$D_v f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + tv) - f(x_0)\right) = Av = Df(x_0)v$$

(b) Sei

$$P := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \wedge y = x^2\right\}$$

Es ist $P \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$ (der Leser möge sich überlegen wieso - ist sehr leicht). Wir haben

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 1 & (x, y) \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Aussage über die Richtungsableitung ist im Prinzip deshalb richtig, weil die tv für $|t|$ klein genug immer so kurz sind, dass sie P nicht „schneiden“. Dies wiederum geht, weil $(0, 0) \notin P$ und P in der Nähe von $(0, 0)$ „krumm“ ist. (Vgl. auch Blatt 3 und 4).
Sei also $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ und $v := (v_1, v_2)$. Wir wollen zeigen, dass es dann $s_v \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass für alle $t \in (-s_v, s_v)$ gilt, dass $tv \notin P$ - also die Formel

$$tv_1 > 0 \quad \wedge \quad tv_2 = t^2 v_1^2 \tag{2}$$

für diese t falsch ist. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) Ist zunächst $v \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, dann wähle $s_v = v_2/v_1^2$. Wir zeigen, dass für alle $t \in (-s_v, s_v)$ gilt, dass $tv \notin P$. Sei also $t \in (-s_v, s_v)$ Damit die Formel (2) im Fall $v \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ wahr ist, müsste auf jeden Fall $tv_1 > 0$, also $t \in (0, s_v)$, gelten. Ist also $t \in (0, s_v)$ dann müsste weiter $tv_2 = t^2 v_1^2$ bzw. äquivalent $v_2 = tv_1^2$ gelten. Dies kann aber nur für $t = v_2/v_1^2 = s_v$ gelten - was nicht sein kann. Also ist die Formel (2) im Fall $v \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ falsch.

(2) Ist $v \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$, dann wähle $s_v = -v_2/v_1^2$ und argumentiere analog zu (1).

(3) In allen anderen Fällen wähle $s_v = 1$. Ist $t \in (-s_v, s_v)$ dann ist $tv_1 \leq 0$ oder $tv_2 \leq 0$ (wieso?). Also insbesondere $tv \notin (0, \infty) \times (0, \infty)$. Also $tv \notin P$.

Wähle also s_v entsprechend (1), (2) und (3). Dann ist aber für alle $t \in (-s_v, s_v)$ eben $f(tv) = 0$ und deshalb für alle $t \in (-s_v, s_v) \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{t}\left(f(0 + tv) - f(0)\right) = \frac{f(tv)}{t} = \frac{0}{t}$$

Und somit

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(0 + tv) - f(0)\right) = 0$$

Dies zeigt, dass alle Richtungsableitungen existieren.
Nun zur Stetigkeit.
Wir zeigen, dass f in 0 nicht stetig ist. Dazu definieren wir uns eine Folge in P, die in $\mathbb{R}^2$ gegen 0 konvergiert. Dann ist nämlich der Grenzwert der Bildfolge 1. Hätten wir jedoch (Folgen-)Stetigkeit so müsste er $f(0) = 0$ sein. Also keine (Folgen-)Stetigkeit.
Sei

$$\begin{aligned} x \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^2 \\ n &\mapsto \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $x(n) \in P$ denn es ist $1/n > 0$ und $1/n^2 = (1/n)^2$. Nun ist aber

$$\lim(f \circ x) = 1 \neq 0 = f(\lim(x))$$

Also ist f in 0 nicht stetig.
Als letztes untersuchen wir totale Differenzierbarkeit. Wäre f total differenzierbar so wäre f nach Bemerkung 4.4 im Skript stetig. Wir haben aber gerade gesehen, dass f nicht stetig ist. Also kann f nicht total differenzierbar sein.

Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann nennt man f *harmonisch*, falls $\triangle f = 0$ ist.

Aufgabe 43 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ nennt man $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\|x\|)$, und für $n \neq 2$ dann $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \|x\|^{2-n},$$

das Newton-Potential auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass f und g harmonisch sind.

Lösungsvorschlag.

(i) Wir zeigen zunächst die zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit. Wir definieren die Radiusfunktion

$$r\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+, \qquad x \mapsto \|x\|$$

Es sind f und g beide von der Form $h \circ r$ mit

$$h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

zweimal stetig differenzierbar, denn wir wissen, dass

$$\begin{aligned} \ln|_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \ln(x) \\ \mathrm{pot}_p|_{\mathbb{R}_+}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto x^p \end{aligned}$$

für $p \in \mathbb{Z}$ zweimal stetig differenzierbar sind.
Weiter wissen wir, dass die Radiusfunktion partiell differenzierbar ist mit, für $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$D_j r = \frac{\mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}}{r} \tag{3}$$

wobei

$$\mathrm{pr}_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$$

die j-te Koordinatenprojektion ist. Da alle pr_j sowie r stetig sind[2] und r nirgends verschwindet, sind auch alle $D_j r$ als Quotient stetig. Aus der Quotientenregel folgt weiterhin die partielle Differenzierbarkeit aller $D_j r$ mit, für $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$D_i D_j r = \frac{1}{r^2}\left(\left(D_i \mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}\right) r - \mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(D_i r)\right) \tag{4}$$

[2]Die Stetigkeit der Norm folgt wir bei der Betragsfunktion aus der umgekehrten Dreiecksungleichung.

Diese zweiten Ableitungen sind aber als Zusammensetzung stetiger Funktionen alle stetig, d.h. r ist zweimal stetig partiell differenzierbar.
Durch zweimalige Anwendung der Kettenregel und mit der Produktregel folgt damit aber auch die zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit von f und g, denn allgemeiner ist $h \circ r$ zweimal stetig partiell differenzierbar für jedes h wie oben, mit

$$\begin{aligned} D_i D_j (h \circ r) &= D_i \left((h' \circ r)\, D_j r \right) \\ &= \left(D_i \left(h' \circ r \right) \right) \left(D_j r \right) + \left(h' \circ r \right) \left(D_i D_j r \right) \\ &= \left(h'' \circ r \right) (D_i r)(D_j r) + \left(h' \circ r \right) \left(D_i D_j r \right) \end{aligned} \tag{5}$$

wobei wieder alle diese zweiten Ableitungen als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig sind.

(ii) Da $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Gebiet ist, bleibt noch zu zeigen, dass $\triangle f = 0 = \triangle g$. Wir berechnen zunächst allgemeiner $\triangle(h \circ r)$ mit h wie in (i). Dazu beachte zunächst, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(\mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x))^2}{r(x)^2} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{\|x\|^2} = 1 \qquad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Nun berechnen wir den Laplace von r. Mit (4) und (3) finden wir

$$\begin{aligned} \triangle r &= \sum_{j=1}^{n} D_j D_j r \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r^2} \left(\left(D_j \mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \right) r - \mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} (D_j r) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r^2} \left(1 \cdot r - \mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \cdot \frac{\mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{pr}_j|^2_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}}{r^2} \right) \\ &= \frac{n-1}{r} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit (3) und (5),

$$\begin{aligned} \triangle(h \circ r) &= \sum_{j=1}^{n} D_j D_j (h \circ r) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (h'' \circ r)\,(D_j r)(D_j r) + \sum_{j=1}^{n} (h' \circ r)\,(D_j D_j r) \\ &= (h'' \circ r) \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(\mathrm{pr}_j|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}\right)^2}{r^2} + (h' \circ r)\,(\triangle r) \\ &= h'' \circ r + \frac{n-1}{r}\,(h' \circ r) \end{aligned}$$

Mit dieser Formel finden wir für f und g,

$$\begin{aligned}\triangle f &= (\ln|_{\mathbb{R}_+})'' \circ r + \frac{2-1}{r}\big((\ln|_{\mathbb{R}_+})' \circ r\big)\\ &= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}\\ &= 0\\ \triangle g &= (\mathrm{pot}_{2-n}|_{\mathbb{R}_+})'' \circ r + \frac{n-1}{r}\big((\mathrm{pot}_{2-n}|_{\mathbb{R}_+})' \circ r\big)\\ &= (2-n)(2-n-1)r^{2-n-2} + \frac{n-1}{r}\cdot(2-n)r^{2-n-1}\\ &= (2-n)(1-n)r^{2-n-2} - (1-n)(2-n)r^{2-n-2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 44 (a) *Ebene Polarkoordinaten* sind wie folgt gegeben: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^2$,

$$f(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(r,\varphi) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, für alle $(r,\varphi) \in G$, und zeigen Sie, dass f injektiv ist. Was ist das Bild von f?

(b) *Räumliche Polarkoordinaten* kann man so definieren: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $g\colon G \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Bestimmen Sie für jedes $(r,\vartheta,\varphi) \in G$ die Jacobi-Matrix $J_g(r,\vartheta,\varphi) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass g injektiv ist. Was ist das Bild von f?

Lösungsvorschlag.

(a) Es gilt für $(r,\varphi) \in G$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi) &= (\cos(\varphi), \sin(\varphi))\\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= (-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi))\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann

$$J_f(r,\varphi) := \begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

Seien nun $(r_1,\varphi_1), (r_2,\varphi_2) \in G$.

$$f(r_1,\varphi_1) = f(r_2,\varphi_2)$$

impliziert

$$r_1\cos(\varphi_1) = r_2\cos(\varphi_2) \quad\wedge\quad r_1\sin(\varphi_1) = r_2\sin(\varphi_2) \tag{6}$$

was wiederum

$$r_1^2 \cos(\varphi_1)^2 = r_2^2 \cos(\varphi_2)^2 \quad \wedge \quad r_1^2 \sin(\varphi_1)^2 = r_2^2 \sin(\varphi_2)^2$$

und damit

$$r_1^2 = r_1^2 \cos(\varphi_1)^2 + \sin(\varphi_1)^2 = r_2^2 \cos(\varphi_2)^2 + \sin(\varphi_2)^2 = r_2^2$$

impliziert. Weil $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ bekommen wir damit schonmal

$$r_1 = r_2$$

Deshalb und weil $r_1 \neq 0$, folgt aus der Formel (6) weiter

$$\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) \quad \wedge \quad \sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$$

Also muss, aufgrund der Symmetrie von sin und cos sowie der Funktionalgleichung von Letzterem (vgl. Vorlesung)

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1 + (-\varphi_2)) &= \cos(\varphi_1)\cos(-\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(-\varphi_2) \\ &= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) \\ &= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_1) \\ &= 1\end{aligned}$$

gelten. Und somit muss $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da aber $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, 2\pi)$ geht dies nur wenn $k = 0$ ist - also

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

ist. Insgesamt folgt

$$(r_1, \varphi_1) = (r_2, \varphi_2)$$

Also ist f injektiv.
Das Bild von f ist $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$.

(b) Es gilt für $(r, \vartheta, \varphi) \in G$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \vartheta, \varphi) &= (\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \vartheta}(r, \vartheta, \varphi) &= (r\cos(\vartheta)\cos(\varphi), r\cos(\vartheta)\sin(\varphi), -r\sin(\vartheta)) \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r, \vartheta, \varphi) &= (-r\sin(\vartheta)\sin(\varphi), r\sin(\vartheta)\cos(\varphi), 0)\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix ist dann

$$J_g(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\|g(r,\vartheta,\varphi)\|^2 &= r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\vartheta) \\
&= r^2\sin^2(\vartheta)(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) + r^2\cos^2(\vartheta) \\
&= r^2(\sin^2(\vartheta)+\cos^2(\vartheta)) \\
&= r^2
\end{aligned}$$

Sind also $(r_1,\vartheta_1,\varphi_1),(r_2,\vartheta_2,\varphi_2)\in G$ mit

$$g(r_1,\vartheta_1,\varphi_1) = g(r_2,\vartheta_2,\varphi_2) \tag{7}$$

so folgt wegen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, dass

$$r_1 = \|g(r_1,\vartheta_1,\varphi_1)\| = \|g(r_2,\vartheta_2,\varphi_2)\| = r_2$$

Aus (7) folgt dann aber wegen $r_1 \neq 0$ auch

$$\cos(\vartheta_1) = \cos(\vartheta_2)$$

und weil cos auf $(0,\pi)$ bijektiv ist, ergibt sich auch $\vartheta_1 = \vartheta_2$. Da nun $\sin(\vartheta_1) \neq 0$ folgt damit aus (7) aber

$$\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) \quad \wedge \quad \sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_2)$$

und wie in (a) ergibt sich $\varphi_1 = \varphi_2$, also insgesamt die Injektivität.
Das Bild von f ist $\mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty)\times\{0\}\times\mathbb{R})$.