Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
13.07.2020
Blatt 12

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem (reellen) Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1.$$

Aufgabe 45. (a) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum V die gleiche Topologie auf V (d.h.: die gleichen offenen Mengen) induzieren.

(b) Sei V nun endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V äquivalent sind. (Hinweis: O.E. sei $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_1$. Betrachten Sie nun $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.)

Lösungsvorschlag.

(a) Seien also $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf V mit Konstanten $c, C > 0$ und seien τ_1 und τ_2 die von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ erzeugten Topologien auf V. Für $v \in V$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit $B_r^1(v)$ und $B_r^2(v)$ den offenen Ball vom Radius r um v.
Wir wollen zeigen, dass $\tau_1 = \tau_2$. Sei also $O \in \tau_1$, d.h. O ist offen bezüglich $\|\cdot\|_1$. Zu jedem $x \in O$ gibt es also $r_1 > 0$ so, dass $B_{r_1}^1(x) \subset O$. Definiere nun $r_2 := cr_1$, dann gilt für alle $y \in B_{r_2}^2(x)$, dass

$$\|y - x\|_1 \leq \frac{1}{c}\|y - x\|_2 < \frac{r_2}{c} = r_1$$

also dass $y \in B_{r_1}^1(x)$. Also folgt $B_{r_2}^2(x) \subset B_{r_1}^1(x) \subset O$ und somit ist O auch offen bezüglich $\|\cdot\|_2$, also $O \in \tau_2$. Dies zeigt $\tau_1 \subset \tau_2$.
Analog können wir aus

$$\|v\|_2 \leq C\|v\|_1$$

für alle $v \in V$ auch schließen dass $\tau_2 \subset \tau_1$ und folglich insgesamt $\tau_1 = \tau_2$.

(b) (i) Sei $n = \dim(V)$. Bemerke zunächst, dass V isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, sei $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to V$ ein solcher Isomorphismus. Sind dann $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf V, dann sind auch $\|\cdot\|_1 \circ \Phi$ und $\|\cdot\|_2 \circ \Phi$ Normen auf $\mathbb{R}^n$, wie man sich leicht klarmacht. Sind diese beiden Normen nun äquivalent mit Konstanten $c, C > 0$, so folgt auch für alle $v \in V$, wegen $v = \Phi(\Phi^{-1}(v))$, dass

$$c\|v\|_1 = c\|\Phi(\Phi^{-1}(v))\|_1 \leq \|\Phi(\Phi^{-1}(v))\|_2 \leq C\|\Phi(\Phi^{-1}(v))\|_1 = C\|v\|_1$$

da ja $\Phi^{-1}(v) \in \mathbb{R}^n$. Also sind auch $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Es reicht folglich zu zeigen, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

(ii) Sei also $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_3$ Normen auf $\mathbb{R}^n$. Sind diese beiden Normen jeweils äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ mit Konstanten $c_1, C_1 > 0$ bzw. $c_3, C_3 > 0$ so folgt auch, für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\frac{c_1}{C_3}\|x\|_1 \leq \frac{1}{C_3}\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq \frac{1}{c_3}\|x\|_2 \leq \frac{C_1}{c_3}\|x\|_1$$

Also sind dann auch $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_3$ äquivalent. Es reicht also zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ist.

(iii) Dazu betrachte

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 = 1\} = \|\cdot\|_2^{-1}(\{1\})$$

Im Folgenden trage $\mathbb{R}^n$ immer die Metrik und Topologie die von der euklidischen Norm kommen. Dann ist $\|\cdot\|_2$ stetig, also $\mathbb{S}^{n-1}$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion selbst abgeschlossen. Da $\mathbb{S}^{n-1}$ offenbar auch beschränkt ist folgt aus dem Satz von Heine-Borel die Kompaktheit von $\mathbb{S}^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$. Definiere nun

$$f \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|$$

(iv) Wir wollen die Stetigkeit von f zeigen.
Die Stetigkeit der Norm $\|\cdot\|$ ist nur bekannt, wenn $\mathbb{R}^n$ auch die Metrik und Topologie trägt, die von $\|\cdot\|$ induziert wird. Hier weiß man aber noch nicht, ob dies der Fall ist, da $\mathbb{R}^n$ die Metrik und Topologie trägt, die von der euklidischen Norm kommt. Ansonsten wäre nicht klar, dass $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist.
Dazu sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dann gilt mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$, dass

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Aus der Dreiecksungleichung und der Homogenität für $\|\cdot\|$ und aus $|x_k| \leq \|x\|_2$, für $k = 1, \ldots, n$, folgt dann die Abschätzung

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\|e_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|\|x\|_2 = C\|x\|_2$$

wobei wir hier

$$C := \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| > 0$$

gesetzt haben. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$ folgt daraus aber für alle $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C\|x - y\|_2$$

was die Stetigkeit von f impliziert[1].

(v) Da aber stetige Funktionen auf Kompakta ihr Infimum annehmen existiert ein $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$0 < c := \|x_0\| \leq \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist $x/\|x\|_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ und somit gilt

$$c\|x\|_2 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \|x\|_2 = \|x\|$$

Für $x = 0$ ist diese Ungleichung aber klar, also gilt sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit c, C haben wir somit Konstanten gefunden, die die Äquivalenz von $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|$ zeigen.

Definition. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Ein *Operator* $T\colon V \to W$ (d.h.: eine lineare Abbildung) heißt *beschränkt*, falls gilt:

$$\|T\| := \sup\{\|Tv\|_W \in [0, \infty) : \ \|v\|_V \leq 1\} < \infty.$$

Aufgabe 46. Seien V und W normierte Vektroräume und $T\colon V \to W$ ein Operator. Zeigen Sie,

(a) dass T genau dann stetig (überall) ist, wenn T stetig in 0 ist;

(b) dass T stetig ist, genau wenn T beschränkt ist;

(c) dass für $\dim V < \infty$ jeder Operator T stetig ist.

Lösungsvorschlag. Zunächst geben wir eine nützliche Eigenschaft beschränkter Operatoren. Ist nämlich T bschränkt und $v \in V \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\frac{1}{\|v\|_V} \|T(v)\|_W = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W \leq \|T\|$$

Außerdem ist mit der Linearität von T

$$\|T(0_V)\|_W = \|0_W\|_W = 0 = \|T\| \, \|0_W\|_W$$

Also gilt für T beschränkt und $v \in V$

$$\|T(v)\|_W \leq \|T\| \, \|v\|_W$$

Dies werden wir im Folgenden mehrfach benutzen.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Für (a) und (b) zeigen wir, dass folgende Aussagen

[1] Siehe Aufgabe 46: Lipschitz-Stetigkeit impliziert Stetigkeit.

(i) T ist stetig

(ii) T ist stetig in 0_V

(iii) T ist beschränkt

äquivalent sind, indem wir die Aussage

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \quad \wedge \quad \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \quad \wedge \quad \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

zeigen.[2]
„(i)⇒(ii)“ Wenn T in jedem Punkt stetig ist, dann natürlich auch in 0_V.
„(ii)⇒(iii)“ Weil T stetig in 0_V ist gib es ein $\tilde{\delta} > 0$ sodass für alle $y \in B^V_{\tilde{\delta}}(0_V)$

$$\|T(y)\|_W = \|T(y) - T(0_V)\|_W < 1$$

Sei also $\delta > 0$ so klein, dass sogar für alle $y \in \bar{B}^V_\delta(0)$

$$\|T(y)\|_W < 1$$

Dann gilt mit der Linearität von T für alle $v \in \bar{B}^V_1(0)$

$$\|T(v)\|_W = \left\|T\left(\frac{\delta}{\delta}v\right)\right\|_W = \left\|\frac{1}{\delta}T(\delta v)\right\|_W = \frac{1}{\delta}\|T(\delta v)\|_W < \frac{1}{\delta}$$

Und deshalb durch Supremumsbildung

$$\|T\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Also ist T beschränkt.
„(ii)⇒(iii)“ Sei T beschränkt. Dann ist für alle $x, y \in V$

$$\|T(y) - T(x)\|_W = \|T(y - x)\|_W \leq \|T\| \, \|y - x\|_V \tag{1}$$

Dies zeigt die sogenannte „Lipschitz-Stetigkeit“ von T mit „Lipschitz-Konstante“ $\|T\|$. Lipschitz-stetige Funktionen sind aber inbesondere stetig. In diesem speziellen Fall[3] sieht man das so: Sei $v \in V$, $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. Dann gilt mit Ungleichung (1) für alle $y \in B^V_\delta(v)$

$$\|T(y) - T(v)\|_W \leq \|T\| \, \|y - v\|_V < \delta \|T\| = \varepsilon$$

Dies zeigt aber die Stetigkeit von T.

Nun zu (c).
Zunächst einmal die Notation: Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ und $\| \cdot \|_2$ einfach Standardskalarprodukt bzw. -norm auf $\mathbb{R}^n$.
Dann zum Kontext: Sei $n := \dim(V)$ und $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von V. Sei weiter $v \in V$.
Dann zur Sache: Weil V endlichdimensional ist, gibt es zu v ein eindeutiges $(v^1, \ldots, v^n) := k_v \in \mathbb{R}^n$ sodass

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$$

Sei also k_v so. Es gilt

[2] Diese Art der Vorgehensweise nennt man manchmal Ringschluss (nicht zu verwechseln mit den bösen Zirkelschlüssen)

[3] und der allgemeine lässt sich davon abstrahieren

- Die lineare Abbildung
$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{B}} \colon V &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto k_x\end{aligned}$$
ist beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_2$. Denn $\|\cdot\|_2 \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ ist eine Norm auf V und nach Aufgabe 1 sind auf V alle Normen äquivalent (V ist ja endlichdimensional). Also gibt es ein $C > 0$ sodass
$$\|\Phi_{\mathcal{B}}(v)\|_2 \leq C\,\|v\|_V$$
Dies zeigt die Beschränktheit von $\Phi_{\mathcal{B}}$.

- Mit der Linearität von T folgt
$$T(v) = \sum_{i=1}^n v^i T(e_i)$$

Sei jetzt
$$\begin{aligned}\nu &:= \big(|v^1|, \ldots, |v^n|\big) \\ \tau &:= (\|T(e_1)\|_W, \ldots, \|T(e_n)\|_W)\end{aligned}$$
Dann ist mit der Dreiecksungleichung ($\triangle$) und der Homogenität (H) der Norm $\|\cdot\|_W$ sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (CS) und der Beschränktheit von $\Phi_{\mathcal{B}}$ (B)
$$\begin{aligned}\|T(v)\|_W &= \left\|\sum_{i=1}^n v^i T(e_i)\right\|_W \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left\|v^i T(e_i)\right\|_W && (\triangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \left|v^i\right| \|T(e_i)\|_W && \text{(H)} \\ &= \langle \tau, \nu \rangle_2 \\ &\leq \|\tau\|_2 \|\nu\|_2 && \text{(CS)} \\ &\leq \|\tau\|_2\,\|\Phi_{\mathcal{B}}\|\,\|v\|_V && \text{(B)}\end{aligned}$$
Dies zeigt die Beschränktheit und somit nach (a) und (b) die Stetigkeit von T.

Aufgabe 47. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in G$ und $f \colon G \to \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar in x_0. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine differenzierbare Kurve $\alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ ($\varepsilon > 0$ geeignet), so dass gilt: $\alpha(0) = x_0$ und $\dot\alpha(0) = v$.

(b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ und α wie unter (a), so gilt:
$$Df(x_0)v = (f \circ \alpha)^{\cdot}(0).$$

Lösungsvorschlag.

(a) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ so, dass $tv + x_0 \in G$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha\colon (-\varepsilon,\varepsilon) &\to G \\ t &\mapsto tv + x_0 \end{aligned}$$

wohldefiniert. α ist differenzierbar, weil für $i = 1, \dots, n$ die i-te Komponentenabbildung $\pi_i \circ \alpha$ differenzierbar ist. Und offenbar gilt $\alpha(0) = 0v + x_0 = x_0$ sowie $\dot\alpha(0) = v$. α repräsentiert also den Tangentialvektor im Punkt x_0 in Richtung v.

(b) Nach der Kettenregel für total differenzierbare Funktionen, folgt aus der totalen Differenzierbarkeit von f und α, dass auch $f \circ \alpha$ total differenzierbar ist, wobei insbesondere

$$(f \circ \alpha)'(0) = (Df(\alpha(0)))\,(\dot\alpha(0)) = (Df(x_0))\,(v)$$

gilt. Lässt man wie üblich die Klammerung weg, so folgt die Behauptung. $(f \circ \alpha)'(0)$ ist also die Richtungsableitung von f in Richtung v im Punkt x_0.

Anmerkung: Diese Aufgabe mag trivial erscheinen hat aber eine nicht unerhebliche Bedeutung. Die alternative Charakterisierung von Tangentialvektoren und Richtungsableitung ermöglicht das Differenzieren auf „Mannigfaltigkeiten“ (z.B. wenn G kein Gebiet sondern die 2-Sphäre ist), was die Grundlage für Differentialgeometrie und somit auch der allgemeinen Relativitätstheorie bildet.

Aufgabe 48. Die *Wärmeleitungsgleichung* ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \triangle f.$$

Hier bei ist $\triangle$ der Laplace-Operator in x-Richtung. Zeigen Sie, dass der so genannte *Wärmeleitungskern*,

$$f(t, x) = t^{-n/2} \exp(-\frac{\|x\|^2}{4t}),$$

diese *partielle Differentialgleichung* erfüllt.

Lösungsvorschlag. Da die Exponentialfunktion beliebig oft differenzierbar ist und weil

$$\|\cdot\|^2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$$

beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist folgt wegen $t \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}_+$ mit der Quotienten-, Ketten- und Produktregel auch die partielle Differenzierbarkeit des Wärmeleitungskerns f und aus der Form der partiellen Ableitungen wie unten berechnet folgt auf die gleiche Weise auch die zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit.

(i) Wir leiten zunächst in der ersten Koordinate ab. Es gilt für $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + t^{-\frac{n}{2}} \frac{\|x\|^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

(ii) Wir schreiben für die partielle Ableitung in Richtung des Standardvektors $e_i \in \mathbb{R}^n$ wie gewohnt D_i, für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

$$D_i f(t,x) = -\frac{2x_i}{4t} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} D_i D_i f(t,x) &= -\frac{1}{2t} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \frac{2x_i}{4t}\frac{x_i}{2t} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= -\frac{1}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \frac{x_i^2}{4t^2} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \end{aligned}$$

Für $D_i D_j f$ mit $i \neq j$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ bekommt man ähnliche Formeln, woraus dann tatsächlich die zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit folgt.

(iii) Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \triangle f(t,x) &= \sum_{i=1}^{n} D_i D_i f(t,x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)\right) \\ &= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{4t^2} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) + t^{-\frac{n}{2}} \frac{\|x\|^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$.