Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
20.07.2020
Blatt 13

Musterlösungen
zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 49. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

(„einlaufende und auslaufende Welle“) zweimal stetig differenzierbar ist und der folgenden *Wellengleichung* genügt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Lösungsvorschlag. Aus der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit von f und g folgt, dass F zweimal stetig differenzierbar ist, weil sich F aus f und g und den zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $x \mapsto x - ct$ und $x \mapsto x + ct$ durch die gängigen Operationen zusammensetzt. Jetzt rechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= f'(x - ct) \cdot (-c) + g'(x + ct) \cdot c, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= f'(x - ct) + g'(x + ct). \end{aligned}$$

Nochmaliges Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= f''(x - ct) \cdot (-c)^2 + g''(x + ct) \cdot c^2, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= f''(x - ct) + g''(x + ct), \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt, dass F eine Lösung der Wellengleichung $D_t^2 F = c^2 D_x^2 F$ ist.

Aufgabe 50. Sei $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ und $f\colon G \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 2 in $(1, 1)$.

Lösungsvorschlag. Es ist $f(1, 1) = 0$ und für den Gradienten von f berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2y}{(x + y)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{-2x}{(x + y)^2}, \end{aligned}$$

insbesondere ist $\mathrm{grad}(f)(1,1) = (1/2, -1/2)$. Und für die Hessesche von f folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-2y\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-4y}{(x+y)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{-2(x+y)^2-(-2x)\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4}\\
&= \frac{-2x-2y+4x}{(x+y)^3} = \frac{2x-2y}{(x+y)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{-(-2x)\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{4x}{(x+y)^3},
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Hess}(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom $P := P^f_{2,(1,1)}(h)$ von f der Ordnung 2 im Entwisklungspunkt $(1,1)$ lautet daher

$$\begin{aligned}
P(h_1,h_2) &= f(1,1) + \langle \mathrm{grad}(f)(1,1), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, \mathrm{Hess}(f))h\rangle)\\
&= 0 + (\frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}h_2) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}h_2^2)\\
&= \frac{1}{2}h_1 - \frac{1}{2}h_2 - \frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{4}h_2^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 51. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (4x^2+y^2)\exp(x^2+4y^2).$$

(a) Berechnen Sie $\mathrm{grad}(f)(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, und zeigen Sie, dass f höchstens in $(x_0,y_0) := (0,0)$ ein lokales Minimum haben kann.

(b) Berechnen Sie nun $\mathrm{Hess}(f)(0,0)$ und zeigen Sie, dass f in (x_0,y_0) ein striktes lokales Minimum hat.

(c) Schauen Sie noch einmal die Funktionsvorschrift von f an und zeigen Sie dann, dass f in (x_0,y_0) sogar ein *striktes globales Minimum* hat.

Lösungsvorschlag. (a) Dann rechnen wir mal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 8x\cdot\exp(\cdots) + (4x^2+y^2)\exp(\cdots)(2x) = 2x(4x^2+2y^2+4)\exp(\cdots),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\cdot\exp(\cdots) + (4x^2+y^2)\exp(\cdots)(8y) = 2y(16x^2+4y^2+1)\exp(\cdots).
\end{aligned}$$

Da der Exponentialfaktor stets größer Null ist und der quadratische Klammerausdruck jeweils ebenso, sieht man, dass

$$\mathrm{grad}(f)(x,y) = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

ist. f kann also höchstens in $(x,y) = (0,0)$ ein lokales Minimum (oder Maximum) haben.

(b) Wir berechnen $\mathrm{Hess}(f)(x,y)$ direkt nur in $(x,y)=(0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{d}{dx}|_{x=0}(2x)(\cdots)\exp(\cdots)|_{(0,0)} + (2x)|_{x=0}(\cdots)\\
&= 2\cdot 4\cdot \exp(0) + 0\cdot(\cdots) = 8,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= (2y)|_{y=0}\cdot \frac{d}{dx}(\cdots) = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \frac{d}{dy}|_{y=0}(2y)(\cdots)\exp(\cdots)|_{(0,0)} + 2y|_{y=0}(\cdots)\\
&= 2\cdot 1\cdot \exp(0) + 0\cdot(\cdots) = 2.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\mathrm{Hess}(f)(0,0) = \mathrm{diag}(8,2)$ positiv definit ist, wobei wir mit $\mathrm{diag}(c_1,\ldots,c_n)\in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $c_1\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ bezeichnen. Damit hat also f ein striktes lokales Minimum in $(0,0)$.

(c) Offenbar ist

$$f(x,y) = (4x^2+y^2)\exp(\cdots) > 0,$$

für alle $(x,y)\neq(0,0)$ und $f(0,0)=0$. Es ist also $(0,0)$ ein striktes globales Minimum von f.

Aufgabe 52. Wir identifizieren $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ $(n\in\mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \{A\in\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}:\ A \text{ ist invertierbar}\}\subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$$

offen ist und die Abbildung $F\colon \mathrm{GL}_n\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $A\mapsto A^{-1}$, stetig differenzierbar. (Hinweis: $\det\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist stetig. Drücken Sie A^{-1} mit Hilfe der Adjunkten von A aus.)

(b) Zeigen Sie, dass für das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ von F in jedem $A\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ gilt:

$$DF_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 47, um $DF_A(B)$ zu berechnen und $F(C)C=\mathbf{1}_n$, für alle $C\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.)

Lösungsvorschlag. (a) Da $A\in\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det A\neq 0$ ist, ist $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ offenbar das Urbild von $\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $\det\colon\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, da det sogar polynomial ist. Da $\mathbb{R}^*\subseteq\mathbb{R}$ offen ist, ist damit auch $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}\subseteq\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ offen.

[Anm.: $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ ist kein Gebiet in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, sondern besteht aus zwei „Wegzusammenhangskomponenten“ U_1,U_2, d.h.: U_1,U_2 sind offen und wegzusammenhngend (also Gebiete in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$) und $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = U_1\,\dot\cup\,U_2$, nämlich $U_1=\{A\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}:\det A>0\}$ und $U_2=\{A\in\mathrm{GL}_n\mathbb{R}:\det A<0\}$ (siehe z.B: G. Fischer: Lineare Algebra (Springer Spektrum)).]

Die Adjunkte $A^\sharp = (a^\sharp_{ij})$ von A ist gegeben durch

$$a^\sharp_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji},$$

wo A_{ji} aus A dadurch entsteht, dass man die j. Zeile und die i. Spalte streicht. (Man spricht bei $\det A_{ji}$ auch vom (ji)-*Minor von* A.) Außerdem gilt für alle $A\in\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$

$$A\cdot A^\sharp = A^\sharp\cdot A = \det(A)\cdot\mathbf{1}_n,$$

was zeigt, dass für $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\sharp$$

gilt. Jeder Eintrag von $A^\sharp$ ist polynomial in den Einträgen von A und damit jeder Eintrag von A^{-1} rational in den Einträgen von A, insbesondere also stetig differenzierbar.

(b) Um $DF_A(B)$, für $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $B \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, zu berechnen, benutzen wir Aufgabe 47 und wählen eine Kurve $\alpha\colon (-\delta, \delta) \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ mit $\alpha(0) = A$ und $\dot{\alpha}(0) = B$, z.B.

$$\alpha(t) = A + tB,$$

welches für $\delta > 0$ klein genug in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ liegt, da $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ offen in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ liegt. Nun wissen wir, dass für alle $t \in (-\delta, \delta)$ nach Definition von F gilt:

$$F(A + tB) \cdot (A + tB) = \mathbf{1}_n.$$

Da jeder Eintrag der Matrix auf der linken Seite dieser Gleichung eine Summe von Produkten von Einträgen von $F(A + tB)$ einerseits und $(A + tB)$ andererseits ist, können wir die Produktregel (in einer Veränderlichen) anwenden und erhalten

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{1}_n) = (\frac{d}{dt}F(A + tB)) \cdot (A + tB) + F(A + tB) \cdot \frac{d}{dt}(A + tB).$$

Auswertung bei $t = 0$ liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB) \cdot A + F(A) \cdot \frac{d}{dt}|_{t=0}(A + tB) \\ &= DF_A(B) \cdot A + A^{-1} \cdot B, \end{aligned}$$

und Multiplikation mit A^{-1} von rechts und anschließender Subtraktion von $A^{-1}BA^{-1}$ schließlich

$$DF_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}.$$

[Anm.: Das ist die verallgemeinerung der Ableitungsregel $d/dx(1/x) = -1/x^2$ (für $x \neq 0$) in einer Veränderlichen ($\mathrm{Mat}_1\mathbb{R} = \mathbb{R}$), welches sich als lineare Abbildung so liest:

$$h \mapsto -\frac{1}{x^2}h = -\frac{1}{x}h\frac{1}{x}.$$

Die beiden Faktoren $1/x$ werden also „gerecht“ rechts und links um h gruppiert. Man beachte, dass für $n \geq 2$ die Multiplikation in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ja nicht mehr kommutativ ist.]