Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
30.07.2020
Blatt 15

Musterlösungen
zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 57. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $Df(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, für alle $x \in G$, so ist auch $D := f(G) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass G dann ein offenes Intervall ist.

Lösungsvorschlag. (a) (i) Sind X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ stetig (z.B. $X = G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $Y = \mathbb{R}^n$ und f stetig differenzierbar) und ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X) \subseteq Y$ wegzusammenhängend. Denn sind y_0 und y_1 in $f(X)$ beliebige Punkte, so gibt es also $x_0, x_1 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$ und $f(x_1) = y_1$. Da X wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg $\alpha\colon [0,1] \to X$ (also α stetig) von x_0 nach x_1, d.h.: $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$. Es ist dann auch $\beta := f \circ \alpha\colon [0,1] \to f(X)$ stetig, damit ein Weg in $f(X)$ und zwar von $\beta(0) = f(\alpha(0)) = f(x_0) = y_0$ nach $\beta(1) = f(\alpha(1)) = f(x_1) = y_1$. Es ist also $f(X)$ auch wegzusammenhängend.

(ii) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $Df(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, für alle $x \in U$, so ist auch $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Denn ist $y \in f(U)$ beliebig, so gibt es ein $x \in U$ mit $f(x) = y$. Nach dem Umkehrsatz existieren dann offene Umgebungen $U' \subseteq U$ von x und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von y mit $f(U') = V$ also $V \subseteq f(U)$. Damit ist $f(U)$ offen.

(i) und (ii) zusammen liefern: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbares Vektorfeld mit invertierbaren $Df(x)$, für alle $x \in G$, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ ein Gebiet (also offen und wegzusammenhängend) und o.E. $G \neq \emptyset$. (Die leere Menge ist auch ein offenes Intervall.) Wir setzen

$$a := \inf(G) \in [-\infty, \infty), \quad b := \sup(G) \in (-\infty, \infty].$$

Da G offen ist, gilt: $a \notin G$, $b \notin G$. Behauptung: $G = (a,b)$. Dass $G \subseteq (a,b)$ ist, ist nach Definition von a und b klar. Wir zeigen also noch: $(a,b) \subseteq G$. Sei dazu $x \in (a,b)$ beliebig. Dann existieren nach Definition des Infimums und des Supremums $c, d \in G$ mit

$$a < c < x < d < y.$$

Da G wegzusammenhängend ist, gibt es ein stetiges $\gamma : [0,1] \to G$ mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma(1) = d$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $\xi \in (0,1)$ mit $\gamma(\xi) = x$. Also ist $x \in G$ und damit $(a,b) \subseteq G$.

Aufgabe 58. (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $f'(x) \neq 0$, für alle $x \in I$, so ist f ein (globaler) Diffeomorphismus auf sein Bild.

(b) Sei $G = (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und f gegeben durch $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Bestimmen Sie $D := f(G) \subseteq \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass f zwar lokaler Diffeomorphismus, nicht aber globaler Diffeormorphismus ist.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist J nach Aufgabe 57 ein offenes Intervall und $f\colon I \to J$ nach dem Umkehrsatz ein lokaler Diffeomorphismus. Wir zeigen noch: f ist injektiv. Dann ist f auch globaler Diffeomorphismus, weil $g = f^{-1}\colon J \to I$ lokal um jedes $y \in J$ mit einem lokalen Diffeomorphismus übereinstimmt.
Da f' stetig ist und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, ist $f > 0$ überall oder $f < 0$ überall, weil $f'(x) \neq 0$ ist, für alle $x \in I$. Sonst gäbe es einen Widerspruch zum Zwischenwertsatz. Damit ist f streng monoton wachsend (bei $f' > 0$) oder streng monoton fallend (bei $f' < 0$), insbesondere injektiv.

(b) Es ist

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\det Df(r, \varphi) = r \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\varphi) = r \neq 0,$$

für alle $(r, \varphi) \in G$. Damit ist f ein lokaler Diffeomrophismus. Aber f ist nicht injektiv, und damit kein globaler Diffeomrophismus, denn beispielsweise ist

$$f(1, 0) = (1, 0) = f(1, 2\pi).$$

Aufgabe 59 (Satz über die Hauptachsentransformation). Sei $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ symmetrisch ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass A einen (reellen) Eigenwert hat. (Hinweis: Betrachten Sie die zu A gehörende quadratische Form unter der Nebenbedingung $\|x\|^2 = 1$.)

Lösungsvorschlag. Die zu $A \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ gehörende quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x) = \langle x, Ax \rangle$, ist stetig differenzierbar und es gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j,k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k = \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{ij} a_{jk} x_k + x_j a_{jk} \delta_{ik}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji}. \end{aligned}$$

Wir ändern den Summationsindex in der zweiten Summe von j zu k und benutzen dann die Symmetrie von A, also $a_{ik} = a_{ki}$, für alle $i, k = 1, \ldots, n$, um zu erhalten:

$$\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) = \sum_{ik}^{n} (a_{ik} + a_{ki}) x_k = 2 \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k,$$

also

$$\mathrm{grad}(q)(x) = 2Ax.$$

Für den Spezialfall $A = \mathbf{1}_n$ erhalten wir so auch den Gradienten der Nebenbedingungsfunktion $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = \|x\|^2 - 1$, als

$$\mathrm{grad}(h)(x) = 2 \cdot \mathbf{1}_n x = 2x.$$

Da nun $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist, nimmt $q|\mathbb{S}^{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ ihr Supremum an. Es gibt also ein $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$q(x_0) = \sup\{q(x) \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Dieses $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist dann natürlich auch lokales Maximum von q unter der Nebenbedingung $h(x) = 0$ und es ist $\mathrm{grad}(h)(x_0) = 2x_0 \neq 0$. Nach Lagranges Multiplikatorregel existiert deshalb ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{grad}(q)(x_0) = \lambda \mathrm{grad}(h)(x_0)$, also

$$2Ax_0 = \lambda \cdot 2x_0,$$

und damit

$$Ax_0 = \lambda x_0.$$

Da $x_0 \neq 0$ ist, ist also der Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ in diesem Fall auch ein Eigenwert für A (und damit die Buchstabenwahl „λ" für beide Begriffe vielleicht gar kein Zufall).

[Anmerkung: Geht man zum orthogonalen Komplement V von x_0 im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über, so bildet A (als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst) diesen Unterraum V wegen ihrer Symmetrie in sich selbst ab, und eine Wiederholung des obigen Argumentes liefert dann einen weiteren normierten Eigenvektor von A, der senkrecht auf x_0 steht. Auf diese Weise bekommt man am Ende eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht. Der Basiswechsel von der kanonischen Basis in diese Orthonormalbasis von Eigenvektoren transformiert A somit in eine Diagonalmatrix mit ihren Eigenwerten auf der Diagonalen. Das nennt man den *Satz über die Hauptachsentransformation* in der Analytischen Geometrie. Ist z.B. $n = 2$ und $A \in \mathrm{Sym}_2\mathbb{R}$ positiv definit, so wird die „Quadrik" $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle x, Ax\rangle = c\}$ (mit einem $c > 0$) durch die Transformation auf die „Hauptachsen", d.i. eine „Eigenbasis" von A, in die „Normalform" $Q = \{y \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c\}$, oder, wenn man noch $a_1 := \sqrt{c/\lambda_1}$ und $a_2 := \sqrt{c/\lambda_2}$ setzt, in

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\},$$

überführt, ist also eine Ellipse mit „Hauptachsen" a_1 und a_2. Der wesentliche Schritt im Beweis dieses Satzes ist aber die Existenz eines (reellen) Eigenwertes für den symmetrischen (oder, wie man auch sagt, *selbstadungierten*) Operator A (weil A mit seinem Adjungierten A^T übereinstimmt).]

Aufgabe 60. Beweisen Sie den Satz über Implizite Funktionen mit Hilfe des Umkehrsatzes. (Hinweis: Ist $F\colon G \to \mathbb{R}^m$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, die stetig differenzierbare Funktion, deren Nullstellengebilde man lokal nach y auflösen möchte, so betrachte man $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, gegeben durch $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$.)

Lösungsvorschlag. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, $F\colon G \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $(x_0, y_0) \in G$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, so betrachten wir $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+n}$, gegeben durch

$$\Phi(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Es ist dann auch Φ stetig differenzierbar und für das Differential von Φ in (x_0, y_0) gilt:

$$D\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\det D\Phi(x_0, y_0) = \det(\mathbf{1}_n) \cdot \det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

und damit ist $D\Phi(x_0, y_0)$ invertierbar. Nach dem Umkehrsatz existieren daher offene Umgebungen $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von (x_0, y_0) und $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von $(x_0, 0) = \Phi(x_0, y_0)$, so dass $\Phi(W) = \tilde{W}$ und $\Phi|W \colon W \to \tilde{W}$ ein Diffeomorphismus ist. Nach eventueller Verkleinerung von W dürfen wir annehmen, dass $W = U' \times V$, mit einer offenen Umgebung $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 und einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von y_0, ist. Wegen der Offenheit von $\tilde{W}$ und $(x_0, 0) \in \tilde{W}$ können wir außerdem eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 wählen, so dass $U \times \{0\} \subseteq \tilde{W}$ ist. Wir setzen jetzt $g \colon U \to \mathbb{R}^m$,

$$g(x) := \Phi^{-1}(x, 0).$$

Damit ist dann $\Phi^{-1}(x, 0) = (x, g(x)) \in U' \times V$, für alle $x \in U$, also $U \subseteq U'$ und $g(U) \subseteq V$. Nach Konstruktion ist g stetig differenzierbar. Schließlich gilt für alle $(x, y) \in U \times V$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = \Phi^{-1}(x, 0) = (x, g(x)) \Leftrightarrow y = g(x),$$

so dass also g tatsächlich die imlizite Gleichung $F(x, y) = 0$ in $U \times V$ explizit macht.