Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
30.07.2020

Musterlösungen zur Klausur der Analysis II/Mathematik für Physiker III

Aufgabe 1. (a) Aus Aufgabe 10 wissen wir, dass $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$, stetig differenzierbar ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$ erfüllt und bijektiv ist. Zeigen Sie: Auch seine Umkehrung, der *Area-Tangens hyperbolicus*, $\operatorname{Artanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt für alle $y \in (-1,1)$:

$$\operatorname{Artanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $y \in (-1,1)$ gilt:

$$\operatorname{Artanh}(y) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Es ist für $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) > 0,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist tanh bijektiv. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist damit auch $\operatorname{Artanh} := \tanh^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt:

$$\operatorname{Artanh}'(y) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{Artanh}(y))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{Artanh}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

(b) Auch $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^2$,

$$f(y) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}) = \frac{1}{2}(\ln(1+y) - \ln(1-y))$$

ist stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}(-1)) = \frac{1}{2}\frac{(1-y)+(1+y)}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{1-y^2}$$

und es ist

$$f(0) = 0 = \operatorname{Artanh}(0).$$

Daraus folgt, dass $f = \operatorname{Artanh}$ ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe T von f im Nullpunkt und begründen Sie, warum T für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$ konvergiert, $f(x) = T(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f mit $F(0) = 0$ in Form einer Potenzreihe und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Die Taylorreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ von exp im Nullpunkt konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x. Es folgt

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n},$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Taylorreihe T von f im Nullpunkt muss deshalb

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^{2n}$$

sein, da man (nach dem Satz von Weierstraß) unter dem Summenzeichen differenzieren darf. Es muss also $f^{(n)}(0) = 0$ für ungerades $n \in \mathbb{N}$ und $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$ sein und nach dem Beschriebenen konvergiert T in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.

(b) Die Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(0) = 0$ ist die Integrafunktion

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Da nun T auf jedem kompakten Teilintervall $[-R, R]$ $(R > 0)$ gleichmäßig konvergiert, darf man auch unter dem Summenzeichen integrieren (wähle dazu $R > |x|$) und erhält

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{2n}\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^x y^{2n}\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f im Nullpunkt von der Ordnung 2.

(b) Begründen Sie, warum f im Nullpunkt kein lokales Extremum haben kann.

Lösungsvorschlag. (a) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \cos x_1 \sin x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sin x_1 \cos x_2,$$

also

$$\operatorname{grad}(f)(0,0) = (0,0).$$

Wir differenzieren weiter:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -\sin x_1 \sin x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -\sin x_1 \sin x_2,$$

also

$$\operatorname{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und damit das Taylorpolynom $P(h)$ im Nullpunkt der Ordnung 2

$$P(h) = f(0,0) + \langle \operatorname{grad}(f)(0,0), h \rangle + \frac{1}{2}\langle h, \operatorname{Hess}(f)(0,0)h \rangle = h_1 h_2.$$

(b) Da

$$\det \operatorname{Hess}(f)(0,0) = -1$$

ist, ist $\operatorname{Hess}(f)(0,0)$ indefinit. (Ein Eigenwert λ_1 muss kleiner, der andere λ_2 muss größer als Null sein, da $\det(\cdots) = \lambda_1 \lambda_2$ ist.) Es liegt damit in $(0,0)$ kein lokales Extremum vor. (Alternativ lässt sich auch elementar einsehen, dass $(x_1, x_2) \mapsto \sin x_1 \cdot \sin x_2$ in jeder Umgebung von $(0,0)$ negative und positive Werte annimmt.)

Aufgabe 4. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ ($G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet) setzt man die *Divergenz von* E durch $\operatorname{div}(E)\colon G\colon \to \mathbb{R}$ und die *Rotation von* E durch $\operatorname{rot}(E)\colon G \to \mathbb{R}^3$ wie folgt fest:

$$\operatorname{div}(E) := \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}, \quad \operatorname{rot}(E) := (\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle zweimal stetig differenzierbaren Felder $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ und Funktionen $f\colon G \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) = 0, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0.$$

(b) Die *Maxwellschen Gleichungen* für das statische elektrische Feld $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ ($G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet) sind im Vakuum gegeben durch $\operatorname{div}(E) = 0$ und $\operatorname{rot}(E) = 0$. Zeigen Sie: Ist $E = \operatorname{grad}(f)$, für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$, so löst E die Maxwell-Gleichungen, genau wenn f harmonisch ist (d.h.: $\triangle(f) = 0$).

Lösungsvorschlag. Bei diesem Lösungsvorschlag benutzen wir aus Sparsamkeitsgründen für eine stetig differenzierbare Funktion f in zwei Veränderlichen (x, y) für die partiellen Ableitungen nach x bzw. y die Notation f_x bzw. f_y. Ist, sagen wir, f_x noch mal stetig differenzierbar, so schreiben wir für ihre y-Ableitung $f_{xy} = (f_x)_y$, also wird dort zunächst nach x und dann nach y differenziert. Für Funktionen in mehreren Veränderlichen verfahren wir analog.

(a) So, und nun rechnen wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) &= \operatorname{div}\left((E_3)_{x_2} - (E_2)_{x_3}, (E_1)_{x_3} - (E_3)_{x_1}, (E_2)_{x_1} - (E_1)_{x_2}\right) \\ &= (E_3)_{x_2 x_1} - (E_2)_{x_3 x_1} + (E_1)_{x_3 x_2} - (E_3)_{x_1 x_2} + (E_2)_{x_1 x_3} - (E_1)_{x_2 x_3}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Schwarz ist damit $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(E)) = 0$. Ähnlich ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{rot}(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = (f_{x_3 x_2} - f_{x_2 x_3}, f_{x_1 x_3} - f_{x_3 x_1}, f_{x_2 x_1} - f_{x_1 x_2}) = 0.$$

(b) Ist $E = \operatorname{grad}(f)$, so ist $\operatorname{rot}(E) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$, wie gerade gesehen. Und für $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$ rechnen wir

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{div}(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}) = f_{x_1x_1} + f_{x_2x_2} + f_{x_3x_3} = \triangle(f).$$

Die Maxwellschen Gleichungen sind also genau dann erfüllt, wenn f harmonisch ist.

Aufgabe 5. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^3$ die implizite Gleichung

$$e^{xyz}\cos(z) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $p = (1, 1, 0)$ eine Lösung dieser Gleichung ist und dass man sie lokal um p eindeutig durch eine Funktion $(x, y) \mapsto g(x, y)$ nach z auflösen kann.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von g in $(1, 1)$.

Lösungsvorschlag. (a) Es ist

$$e^{xyz}\cos(z)\big|_{(x,y,z)=(1,1,0)} = e^0\cos(0) = 1 \cdot 1 = 1,$$

also $p = (1, 1, 0)$ Lösung der Gleichung. Es ist weiter für das stetig differenzierbare $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = e^{xyz}\cos(z) - 1$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xye^{xyz}\cos(z) + e^{xyz}(-\sin(z)) = e^{xyz}(xy\cos(z) - \sin(z)),$$

also bei p:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p) = e^0(1 \cdot 1 \cdot 1 - 0) = 1 \neq 0.$$

Deshalb kann man nach dem Impliziten Funktionensatz die Gleichung lokal um $p \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen, $z = g(x, y)$ (für (x, y) aus einer Umgebung von $(1, 1)$ und $g(1, 1) = 0$).

(b) Es ist nun weiter

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = yze^{xyz}\cos(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = xze^{xyz}\cos(z),$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial (x, y)}(1, 1, 0) = (0, 0).$$

Für den Gradienten von g in $(1, 1)$ folgt damit

$$\operatorname{grad}(g)(1, 1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial (x, y)}(1, 1, 0) = -1 \cdot (0, 0) = (0, 0).$$

Aufgabe 6. Wir betrachten die Ellipse

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

mit den Hauptachsen $a > 0$ und $b > 0$ und es sei $b < a$.

(a) Argumentieren Sie möglichst präzise, warum das Normquadrat $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, auf C sein Infimum

$$c = \inf\{x^2 + y^2 \geq 0 : \ (x, y) \in C\} \in \mathbb{R}$$

annimmt.

(b) Bestimmen Sie nun alle Punkte $P \in C$ mit $f(P) = c$, die also vom Zentrum $(0, 0)$ minimalen Abstand haben, und berechnen Sie c.

Lösungsvorschlag. (a) $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist als Urbild $g^{-1}(1)$ der stetigen Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, abgeschlossen und wegen $b < a$ ist

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = a^2, \quad \text{für alle } (x, y) \in C,$$

auch beschränkt und damit nach Heine-Borel kompakt. Da $f|C: C \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt f nach dem Satz von Weierstraß sein Infimum an.

(b) Wir betrachten nun die Nebenbedingung $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Dann ist

$$\operatorname{grad}(h)(x, y) = (\frac{2}{a^2} x, \frac{2}{b^2} y) \neq (0, 0), \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0),$$

also $\operatorname{grad}(h)(x, y) \neq (0, 0)$, für alle $(x, y) \in C$, da $(0, 0)$ nicht auf C liegt. Für ein globales Infimum $p = (x_0, y_0) \in C$ von f muss es daher nach dem Satz von Lagrange ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0) = \lambda \operatorname{grad}(h)(x_0, y_0)$, also

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \cdot \frac{2}{a^2} x \\ 2y &= \lambda \cdot \frac{2}{b^2} y. \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ ist dann $1 = \lambda / a^2$ und damit kann wegen $y = \frac{a^2}{b^2} y$ nur noch $y = 0$ sein, also wegen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ schließlich $x = \pm a$. Für $x = 0$ findet man daraus $y = \pm b$. Es gibt also nur die vier Kandidaten $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$. Wegen

$$f(\pm a, 0) = a^2 > b^2 = f(0, \pm b)$$

liegen in $P_1 = (0, b)$ und $P_2 = (0, -b)$ die beiden globalen Minima vor und es gilt offenbar $c = f(P_1) = f(P_2) = b^2$.