Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
12.10.2020

Musterlösungen zur Nachklausur der Analysis II/Mathematik für Physiker III

Aufgabe 1. (a) Wir definieren den *Cotangens* $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $\cot(x) := \cos(x)/\sin(x)$. Begründen Sie, warum cot differenzierbar ist mit

$$\cot'(x) = -1 - \cot^2(x),$$

für alle $x \in (0,\pi)$. Begründen Sie weiter, dass cot bijektiv ist.

(b) Sei nun $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$ die Umkehrfunktion von cot, der *Arcuscotangens* $\operatorname{arccot} := \cot^{-1}$. Begründen Sie, dass arccot differenzierbar ist mit

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2},$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{arccot}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

Lösungsvorschlag. (a) Da cos und sin differenzierbar sind und sin auf $(0,\pi)$ keine Nullstellen besitzt, ist auch cot differerenzierbar und nach der Quotientenregel ist mit $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$:

$$\cot'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x),$$

für alle $x \in (0,\pi)$. Da sin auf $(0,\pi)$ überall positiv ist und für $x \to 0$ gegen $\sin(0) = 0$ konvergiert, denn sin ist stetig in 0, und außerdem cos ebenfalls stetig in 0 ist mit $\cos(0) = 1$, folgt, dass $\lim_{x\to 0} \cot(x) = +\infty$ ist. Wegen $\sin(\pi) = 0$ und $\cos(\pi) = -1$ sieht man genau so, dass $\lim_{x\to\pi} \cot(x) = -\infty$ ist. Schließlich zeigt der Ausdruck für die Ableitung von cot, dass sie überall negativ ist, weshalb cot streng monoton fallend ist. Mit dem üblichen Zwischenwertargument sieht man daher, dass $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ bijektiv sein muss.

(b) Da nach der obigen Formel $\cot'(x) \neq 0$ ist, für alle $x \in (0,\pi)$, ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion auch die Umkehrung $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$ differenzierbar und hat Ableitung

$$\operatorname{arccot}'(y) = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(y))} = \frac{1}{-1-\cot^2(\operatorname{arccot}(y))} = \frac{1}{-1-y^2} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Aber diese Ableitung hat auch die Funktion $\mathbb{R} \to (0,\pi)$, $y \mapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(y)$ und außerdem stimmt sie mit arccot an der Stelle $y = 0$ überein, wo nämlich der Arcustangens Null und der Arcuscotangens $\pi/2$ ist, denn $\cot(\pi/2) = 0$. Damit stimmen sie auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

Aufgabe 2. Wir betrachten die unendlich oft differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe T von f im Nullpunkt und begründen Sie, warum T für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$ konvergiert, $f(x) = T(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Stammfunktion $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f mit $F(0) = 0$ in Form einer Potenzreihe und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Die Taylorreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$ von sin im Nullpunkt konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

Weil man nach dem Satz von Weierstraß bei konvergenten Potenzreihen unter dem Summenzeichen differenzieren darf, muss damit $T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{4n+2}$ die Taylorreihe von f im Nullpunkt sein und sie konvergiert damit offenbar für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$, $T(x) = f(x)$.

(b) Die Stammfunktion $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(0) = 0$ ist die Integralfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

Da nun T auf jedem kompakten Teilintervall $[-R, R]$ $(R > 0)$ gleichmäßig konvergiert, darf man auch unter dem Summenzeichen integrieren (wähle dazu $R > |x|$) und erhält

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{4n+2}\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x y^{4n+2}\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)} x^{4n+3}.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f im Nullpunkt von der Ordnung 2.

(b) Begründen Sie, warum f im Nullpunkt ein lokales Maximum hat.

Lösungsvorschlag. (a) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\sin x_1 \cos x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -\cos x_1 \sin x_2,$$

also

$$\operatorname{grad}(f)(0,0) = (0,0).$$

Wir differenzieren weiter:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -\cos x_1 \cos x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -\cos x_1 \cos x_2,$$

also

$$\operatorname{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und damit das Taylorpolynom $P(h)$ im Nullpunkt der Ordnung 2

$$P(h) = f(0,0) + \langle \operatorname{grad}(f)(0,0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, \operatorname{Hess}(f)(0,0)h\rangle = 1 - \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2.$$

(b) Damit ist also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = 0$ und $\operatorname{Hess}(f)(0,0)$ negativ definit und somit $(0,0)$ ein lokales Maximum von f (was man auch elementar wegen $\cos x \leq 1$, für alle $x \in \mathbb{R}$, leicht direkt einsehen kann).

Aufgabe 4. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$, heißt *eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit* $c > 0$, wenn sie Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$

ist.

(a) Sei $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Welle sowie $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass auch die *um* t_0 *verspätete Welle* $v\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x,t) = u(x, t - t_0)$, und die *um* x_0 *verschobene Welle* $w\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x,t) = u(x - x_0, t)$ Lösungen der Wellengleichung sind.

(b) Seien nun $A \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbb{R}_+$ sowie $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x,t) = A\cos(\langle k, x\rangle - \omega t)$. Stellen Sie eine Bedingung an (k, ω) auf, damit u (für jedes $A \in \mathbb{R}$) eine Welle der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ wird und begründen Sie dies. (So genannte „ebene Welle“)

Lösungsvorschlag. (a) Für $v\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x,t) = u(x, t - t_0)$, ist v als Verkettung von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ebenfalls zweimal stetig differenzierbar und es gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t - t_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t - t_0)$$

für $i = 1, 2, 3$. Damit ist dann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t - t_0), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t - t_0)$$

$(i = 1, 2, 3)$. Erfüllt nun u die Wellengleichung (mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$), so ist auch

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \triangle v\right)(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t - t_0) - c^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,t) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t - t_0) - c^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t - t_0) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u\right)(x, t - t_0) = 0.
\end{aligned}$$

Ebenso sieht man, dass für die Verschiebung $w\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x,t) = u(x - x_0, t)$, auch w zweimal stetig differenzierbar ist mit

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \triangle w\right)(x,t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u\right)(x - x_0, t) = 0,$$

falls u die Wellengleichung löst.

(b) Für jedes $A \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^3$ und $\omega > 0$ ist die Funktion $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,t) = A\cos(\langle k, x\rangle - \omega t)$$

zweimal stetig differenzierbar und es gilt nach den bekannten Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \omega A \sin(\langle k, x\rangle - \omega t), \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) &= -k_i A \sin(\langle k, x\rangle - \omega t), \text{ für } i = 1,2,3, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -\omega^2 A \cos(\langle k, x\rangle - \omega t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) &= -k_i^2 A \cos(\langle k, x\rangle - \omega t), \text{für } i = 1,2,3. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \triangle u)(x,t) = -(\omega^2 - c^2 \sum_{i=1}^{3} k_i^2) A \cos(\langle k, x\rangle - \omega t),$$

und das verschwindet nun für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}$, genau wenn

$$\omega^2 - c^2\|k\|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = c\|k\|$$

ist (denn es gibt dann $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}$ mit $A\cos(\langle k, x\rangle - \omega t) \neq 0$). Die Funktion u löst damit die Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ genau dann, wenn die Bedingung $\omega = c\|k\|$ (so genannte *Dispersionsrelation*) erfüllt ist.

Aufgabe 5. Wir betrachten auf $(\mathbb{R}_+)^3$ die implizite Gleichung

$$\ln(x + y + z)\sin(z) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $p = (1, 1, \pi)$ eine Lösung dieser Gleichung ist und dass man sie lokal um p eindeutig durch eine Funktion $(x, y) \mapsto g(x, y)$ nach z auflösen kann.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von g in $(1, 1)$. (Können Sie in diesem Fall g explizit angeben?)

Lösungsvorschlag. (a) Es ist

$$\ln(1 + 1 + \pi)\sin(\pi) = 0, ,$$

also $p = (1, 1, \pi)$ Lösung der Gleichung. Es ist weiter für das stetig differenzierbare $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = \ln(x + y + z)\sin(z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\sin(z)}{x+y+z} + \ln(x+y+z)\cos(z),$$

also bei p:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p) = \ln(2+\pi)\cos(\pi) = -\ln(2+\pi) \neq 0.$$

Deshalb kann man nach dem Impliziten Funktionensatz die Gleichung lokal um $p \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen, $z = g(x,y)$ (für (x,y) aus einer Umgebung von $(1,1)$ und $g(1,1) = \pi$).

(b) Es ist nun weiter

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\sin(z)}{x+y+z}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\sin(z)}{x+y+z},$$

also

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,\pi) = (0,0).$$

Für den Gradienten von g in $(1,1)$ folgt damit

$$\operatorname{grad}(g)(1,1) = -(\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,\pi))^{-1}\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1,\pi) = (0,0).$$

Anmerkung. In diesem Fall kann man g auch „von Hand“ finden: Es ist offenbar $F(x,y,z) = 0$, genau wenn $\ln(x+y+z) = 0$ oder $\sin(z) = 0$ ist, also wenn

$$x+y+z = 1 \text{ oder } z = k\pi \text{ (für } k \in \mathbb{Z})$$

ist. (Das sind alles Ebenenstücke in $\mathbb{R}^3_+$, die sich paarweise nicht schneiden.) Die Lösungsmenge in einer Umgebung von $p = (1,1,\pi)$ ist dann offenbar gerade durch $z = \pi$ gegeben, also ist dort

$$g(x,y) = \pi, \text{für alle } (x,y) \text{ um } (1,1).$$

Aufgabe 6. Wir betrachten die Hyperbel

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 = 1\}.$$

(a) Begründen Sie, warum das Normquadrat $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2$, auf C sein Infimum

$$c = \inf\{x^2+y^2 \geq 0 : \ (x,y) \in C\} \in \mathbb{R}$$

annimmt.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $P \in C$ mit $f(P) = c$, die also vom Zentrum $(0,0)$ minimalen Abstand haben, und berechnen Sie c.

Lösungsvorschlag. (a) In der *Einheitskreisscheibe*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\}$$

ist $C \cap D \neq \emptyset$, denn die Punkte $(\pm 1, 0)$ liegen offenbar in diesem Schnitt. Außerdem ist $C \cap D$ abgeschlossen, da sowohl C als auch D abgeschlossen sind, und $C \cap D$ ist offenbar auch beschränkt und damit nach Heine-Borel kompakt (und nicht-leer). Die stetige Funktion $f|C \cap D$

nimmt daher ihr Infimum nach dem Satz von Weierstraß an und das Infimum von $f|C \cap D$ ist das Gleiche wie das von $f|C$.

(b) Wir betrachten nun die Nebenbedingung $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

Dann ist

$$\operatorname{grad}(h)(x, y) = (2x, -2y) \neq (0, 0), \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0),$$

also $\operatorname{grad}(h)(x, y) \neq (0, 0)$, für alle $(x, y) \in C$, da $(0, 0)$ nicht auf C liegt. Für ein globales Minimum $P = (x_0, y_0) \in C$ von $f|C$ muss es daher nach dem Satz von Lagrange ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $\operatorname{grad}(f)(x_0, y_0) = \lambda \operatorname{grad}(h)(x_0, y_0)$, also

$$\begin{aligned} 2x_0 &= \lambda \cdot 2x_0 \\ 2y_0 &= \lambda \cdot (-2y_0) \end{aligned}$$

sowie

$$x_0^2 = 1 + y_0^2.$$

Für $x_0 = 0$ ist das wegen $1 + y_0^2 > 0$ nicht möglich, also ist $x_0 \neq 0$ und damit $\lambda = 1$. Es folgt $y_0 = 0$ und daraus $x_0 = \pm 1$. Da $f(\pm 1, 0) = 1$ ist, folgt $c = 1$ und damit liegen in $P_1 = (-1, 0)$ und $P_2 = (1, 0)$ die beiden globalen Minima von $f|C$, die somit den minimalen Abstand zum Nullpunkt haben.

Anmerkung. In diesem Fall findet man die beiden globalen Minima von $f|C$, also die nächsten Punkte von C zum Ursprung, auch „von Hand“. Es liegen nämlich in D wegen $x^2 + y^2 \leq 1$ nur solche Punkte (x, y) in C, also $x^2 = 1 + y^2$, für die

$$1 \geq x^2 + y^2 = (1 + y^2) + y^2 = 1 + 2y^2$$

gilt, also $y = 0$ und damit $x = \pm 1$. Das sind damit die mit kleinstem Abstand zum Ursprung.