Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
25.05.2020
Blatt 06

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 21. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) = e^{-1/x^2} \cos(\frac{1}{x})$$

für $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f ∞-oft differenzierbar ist, dass $f'(0) = 0$ ist, f aber weder lokales Extremum noch Sattelpunkt in $x_0 = 0$ hat.

Lösungsvorschlag. Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f offenbar ∞-oft differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} \sin(\frac{1}{x}).$$

Die Ableitung existiert zudem auch in 0 und es ist $f'(0) = 0$, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2} \cos(\frac{1}{h}) - 0}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(\frac{1}{h})}{he^{1/h^2}} = 0.$$

Dabei haben wir verwendet, dass der Kosinus beschränkt ist und

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{he^{1/h^2}} = \lim_{h\to \pm\infty} \frac{h}{e^{h^2}} = 0$$

ist, da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom.

Über Induktion zeigt man, dass die höheren Ableitungen für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von der Form

$$f^{(n)}(x) = g_n(x) e^{-1/x^2} \cos(\frac{1}{x}) + h_n(x) e^{-1/x^2} \sin(\frac{1}{x})$$

sind, wobei die Funktionen $g_n, h_n\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ Polynome in $\frac{1}{x}$ sind. Wie oben folgt wegen des schnellen Wachstums der Exponentialfunktion dann induktiv, dass $f^{(n)}(0)$ existiert und 0 ist. Der Beweis, dass f weder ein lokales Extremum noch einen Sattelpunkt in $x_0 = 0$ hat folgt komplett analog zu Aufgabe 18.

Aufgabe 22. Sei r eine rationale Funktion (vgl. Aufgabe 20) und $f_r\colon I \to \mathbb{R}$ die zugehörige Funktion sowie $a \in \mathbb{R} \setminus I$. Zeigen Sie, dass die *einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x\to a^-} f_r(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to a^+} f_r(x)$$

uneigentlich existieren und $+\infty$ oder $-\infty$ sind. (Wir nennen a *einen Pol von* f_r.)

Lösungsvorschlag. Wir betrachten zuerst den einfachen Fall, dass $f(x) = \frac{1}{x-a}$ ist. In diesem Fall ist klar, dass

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty.$$

Damit folgt die Behauptung auch für Funktionen der Form $f(x) = (\frac{1}{(x-a)})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $r = [(p,q)] \in \mathbb{R}(X)$ eine rationale Funktion, $f_r \colon I_r \to \mathbb{R}$ die zugehörige Funktion und $a \in \mathbb{R} \setminus I_r$. Wir können wie in Aufgabe 20 annehmen, dass p und q teilerfremd sind und für q ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $q = (X-a)^n \hat{q}$ wobei $\hat{q} \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom ist, welches in a nicht verschwindet. Dann gilt

$$\lim_{x \to a^-} f_r(x) = \lim_{x \to a^-} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{p(x)}{\hat{q}(x)} \frac{1}{(x-a)^n}. \tag{1}$$

Da nicht nur $\hat{q}$ sondern auch p in a verschieden von Null ist (beachte die Teilerfremdheit von p und q!) und Polynome stetig sind, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^-} \frac{p(x)}{\hat{q}(x)}$$

und ist verschieden von Null. Somit folgt die uneigentliche Existenz von (1) aus dem Fall $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$. Für den anderen einseitigen Grenzwert kann komplett analog vorgegangen werden.

Aufgabe 23 Sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine formale Potenzreihe. Wir nennen dann die formale Potenzreihe

$$P' := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$$

die *formale Ableitung von P*.

(a) Angenommen P konvergiere in einer Zahl $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass dann P und P' für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$ absolut konvergieren. (Hinweis: Majorisieren Sie i.W. mit den konvergenten Reihen $\sum_0^{\infty} \theta^n$ und $\sum_0^{\infty} (n+1)\theta^n$ für $\theta = |x/x_0| < 1$.)

(b) Wir definieren nun *den Konvergenzradius von P* durch

$$R_P := \sup\{r \in [0,\infty) : \ P \text{ konvergiert in einem } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| = r\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in (-R_P, R_P)$ konvergiert P in x absolut und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R_P$ divergiert P in x. (Das Intervall $I_P = (-R_P, R_P)$ wird als *Konvergenzbereich von P* bezeichnet.)

(c) Zeigen Sie: $R_{P'} \geq R_P$. (Anmerkung: Es gilt sogar: $R_{P'} = R_P$, siehe Batt 07, Aufgabe 26.b.)

Lösungsvorschlag. Angenommen P konvergiert in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d. h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

existiert. Dann ist die Folge $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und als solche im Betrag beschränkt durch eine Konstante $M > 0$. Mit dem Hinweis erhalten wir dann für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |x_0|$, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n |a_n x_0^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty.$$

Dabei haben wir die Konvergenz der geometrischen Reihe verwendet. Somit konvergiert P in x.

Für die Aussage über P' verwenden wir, dass auch $(a_{n+1}x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, da $a_{n+1}x_0^n = \frac{1}{x_0} a_{n+1} x_0^{n+1}$ gegen Null konvergiert. Wir finden somit wieder eine Konstante $M' > 0$, durch die $(a_{n+1}x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Betrag beschränkt ist. Daher ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(n+1)a_{n+1}x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left|\frac{x}{x_0}\right|^n |a_{n+1}x_0^n| \leq M' \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty.$$

Die Konvergenz der letzten Reihe kann leicht über das Quotientenkriterium eingesehen werden. Somit konvergiert also P' ebenfalls in x. Die Teile (b) und (c) folgen nun direkt aus Teil (a).

Aufgabe 24 (Der Abelsche Grenzwertsatz). Sei P eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$ und $f\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$ die von P induzierte Funktion, $f(x) = P(x)$. Angenommen nun, dass P auch noch in $x = R$ konvergiere. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass

$$\lim_{x\to R} f(x) = P(R)$$

ist.

(i) Sei $P = \sum_0^\infty a_n X^n$ und o.E. $R = 1$. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq -1$ setze $s_n := \sum_{k=n+1}^\infty a_k$ und zeige: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist $\sum_0^\infty s_n x^n$ konvergent und es gilt:

$$P(1) - f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

(ii) Zerlegen Sie nun die Summe auf der rechten Seite geschickt in zwei Teile, um zu sehen, dass die rechte Seite für $x \to 1$ gegen Null konvergiert.

Lösungsvorschlag. Da $P(1) = \sum_{n=0}^\infty a_n$ existiert, muss $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und somit insbesondere beschränkt sein. Es folgt also, dass für $x \in (-1, 1)$ die Reihe $\sum_{n=0}^\infty s_n x^n$ absolut konvergiert, da man ähnlich wie oben eine Abschätzung gegen ein Vielfaches einer geometrischen Reihe durchführen kann. Wir erhalten nun, dass

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^n \\
&= s_0 \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=-a_n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\
&= (P(1) - a_0) - (f(x) - a_0) \\
&= P(1) - f(x).
\end{aligned}$$

Ist nun $\epsilon > 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt $|s_n| < \epsilon$. Damit erhalten wir für $n \geq n_0$ und $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
|P(1) - f(x)| &= \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n\right| \\
&= \left|(1-x)\sum_{n=0}^{n_0} s_n x^n + (1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} s_n x^n\right| \\
&\leq (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |s_n x^n| + \epsilon \underbrace{(1-x)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} x^n}_{=x^{n_0+1}} \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |s_n x^n| + \epsilon x^{n_0+1}.
\end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck konvergiert der erste Term für $x \to 1$ gegen 0 und der zweite gegen ϵ. Damit ist $|P(1) - f(x)|$ für $x \to 1$ kleiner als ϵ. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.