Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
07.10.2020

Nachklausur
zu Analysis 2/Mathematik für Physiker 3

Name: Matrikelnummer:

Vorname: Studiengang:

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften dieses mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben und 12 Teilaufgaben. In jeder Teilaufgabe können bis zu 4 Punkte erreicht werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	**Summe**
Punkte													

Aufgabe 1. (a) Wir definieren den *Cotangens* $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $\cot(x) := \cos(x)/\sin(x)$. Begründen Sie, warum cot differenzierbar ist mit

$$\cot'(x) = -1 - \cot^2(x),$$

für alle $x \in (0,\pi)$. Begründen Sie weiter, dass cot bijektiv ist.

(b) Sei nun $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$ die Umkehrfunktion von cot, der *Arcuscotangens* $\operatorname{arccot} := \cot^{-1}$. Begründen Sie, dass arccot differenzierbar ist mit

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2},$$

für alle $y \in \mathbb{R}$ und dass für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{arccot}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

Bitte wenden

Aufgabe 2. Wir betrachten die unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe T von f im Nullpunkt und begründen Sie, warum T für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$ konvergiert, $f(x) = T(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Stammfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f mit $F(0) = 0$ in Form einer Potenzreihe und begründen Sie.

Aufgabe 3. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2$.

(a) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f im Nullpunkt von der Ordnung 2.

(b) Begründen Sie, warum f im Nullpunkt ein lokales Maximum hat.

Aufgabe 4. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto u(x,t)$, heißt *eine Welle mit Ausbreitungsgeschwindigkeit* $c > 0$, wenn sie Lösung der *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u$$

ist.

(a) Sei $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Welle sowie $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass auch die *um t_0 verspätete Welle* $v\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x,t) = u(x, t - t_0)$, und die *um x_0 verschobene Welle* $w\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x,t) = u(x - x_0, t)$ Lösungen der Wellengleichung sind.

(b) Seien nun $A \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^3$ und $\omega \in \mathbb{R}_+$ sowie $u\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x,t) = A\cos(\langle k, x\rangle - \omega t)$. Stellen Sie eine Bedingung an (k, ω) auf, damit u (für jedes $A \in \mathbb{R}$) eine Welle der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ wird und begründen Sie dies. (So genannte „ebene Welle“)

Aufgabe 5. Wir betrachten auf $(\mathbb{R}_+)^3$ die implizite Gleichung

$$\ln(x + y + z)\sin(z) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $p = (1, 1, \pi)$ eine Lösung dieser Gleichung ist und dass man sie lokal um p eindeutig durch eine Funktion $(x,y) \mapsto g(x,y)$ nach z auflösen kann.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von g in $(1,1)$. (Können Sie in diesem Fall g explizit angeben?)

Aufgabe 6. Wir betrachten die Hyperbel

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 = 1\}.$$

(a) Begründen Sie, warum das Normquadrat $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, auf C sein Infimum

$$c = \inf\{x^2 + y^2 \geq 0 : \ (x,y) \in C\} \in \mathbb{R}$$

annimmt.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $P \in C$ mit $f(P) = c$, die also vom Zentrum $(0,0)$ minimalen Abstand haben, und berechnen Sie c.