

Vorkapitel: Komplexe Zahlen

$$x^2 = -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

↑ für alle

$$i^2 = -1$$

$$(bi)^2 = -b^2$$

$$a, b \in \mathbb{R}, (a+ib)(c+id) =$$

$$= ac + ibc + aid + ibid$$

$$= (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ komplexe Z.}$$

ib imaginäre Zahlen

Def $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

mit folgenden Regeln für

Add. & Mult.:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

$$i := (0, 1)$$

Statt $(a, 0)$ schreiben wir a

(beachte $(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)$)

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Satz $i^2 = -1.$

Bew $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1)$
 $= (-1, 0) = -1. \quad \square$

Satz $a + ib = (a, b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

Bew $ib = (0, 1) \cdot (b, 0)$
 $= (0 - 0, 1 \cdot b + 0)$
 $= (0, b).$

$$a + ib = (a, 0) + (0, b)$$
$$= (a, b). \quad \square$$

Bem $\mathbb{C}$ ist ein "Körper".

(Regeln für $+$ $-$ $\cdot$ $:$)

Es gibt keine Relation $<$,
die $\mathbb{C}$ zum "angordneten
Körper" macht.

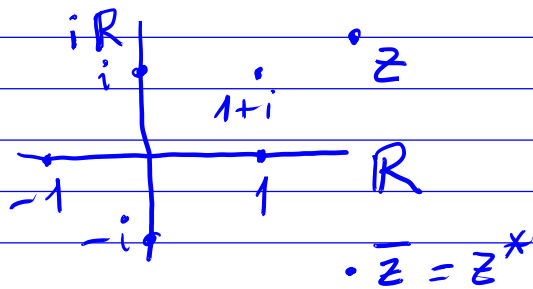
Def Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$

$\operatorname{Re} z := a$ Realteil

$\operatorname{Im} z := b$ Imaginärteil

Def konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{a + ib} := (a + ib)^* := a - ib$$



Bem $\forall w, z \in \mathbb{C}$:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

Aufg $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$$\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Beweis $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

es gibt $z = a + ib, w = c + id$.

$$\overline{z+w} = \overline{(a+c, b+d)}$$

$$= (a+c, -b-d)$$

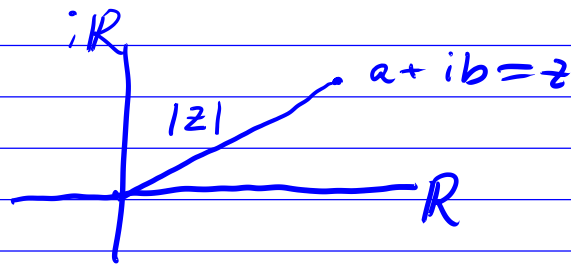
$$= (a, -b) + (c, -d)$$

$$= \bar{z} + \bar{w}$$

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re} z$$

□

Def $|a+ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$.



Bem $\forall z \in \mathbb{C} : \bar{z} z = |z|^2$.

Bew $\exists a, b \in \mathbb{R} : z = a+ib$.

$$\bar{z} z = (a-ib)(a+ib) =$$

$$= a^2 + aib - iba - ibib$$

$$= a^2 + b^2$$

$$= |z|^2$$

□