Vektoren und Matrizen

Vektor = n-Tupel

$$u = (u_1, \dots, u_n) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Cartesisches Produkt

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A,\ b \in B \}$$

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \}$$

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ Faktoren}} =: A^n, \quad \mathbb{R}^3$$

Matrix A = Schema mit $m \cdot n$ Einträgen.

z.B. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $(m = 2 = n)$

allg. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ m Zeilen, n Spalten

$= (a_{ij})$

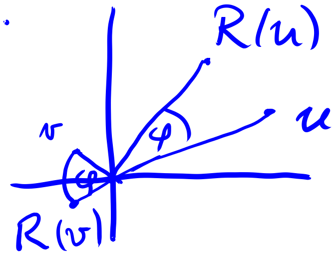
Anwendung einer Matrix auf einen Vektor: $\in \mathbb{R}^2$

Def $Au := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{bmatrix}$

Matrix · Vektor = Vektor.

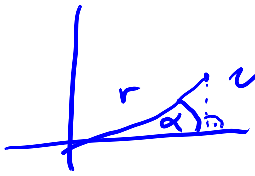
Bsp: Drehungen

$R = R_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Drehung um den Ursprung um den Winkel φ gegen UZS.

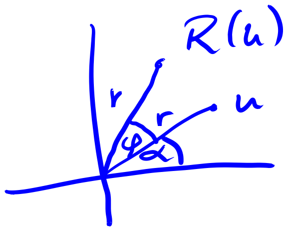


Problem: Berechne $R(u)$ aus $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Lösung: Polarkoordinaten



$$u = \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{bmatrix}$$



$$R(u) = \begin{bmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{Additionsthm}}{=} \begin{bmatrix} r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi \\ r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\, u_1 - \sin\varphi\, u_2 \\ \sin\varphi\, u_1 + \cos\varphi\, u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{=: A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R(u) = Au.$$