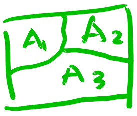
Äquivalenz-Relationen

Def Eine Partition einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine Menge $\mathcal{A}$ derart, dass

- $\forall A \in \mathcal{A}: \emptyset \neq A \subseteq M$
- $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = M$
- $\forall A, B \in \mathcal{A}$: wenn $A \neq B$, dann
  $A \cap B = \emptyset$

Bsp 

M

Def Eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf der Menge $M \neq \emptyset$

[wir schreiben aRb für $(a,b) \in R$]

heißt Äquivalenzrelation, wenn

(Ä1) $\forall a \in M$: aRa (reflexiv)

(Ä2) $\forall a, b \in M$: wenn aRb, dann bRa (symmetrisch)
("$aRb \Rightarrow bRa$")

(Ä3) $\forall a, b, c \in M$: wenn aRb und bRc, dann aRc (transitiv)

Bsp $M = \{\text{Geraden in } \mathbb{R}^2\}$

$R = \parallel$

Satz: Zu jeder Äq.rel. R auf M existiert eine eind. bestimmte Partition $\mathcal{A}$ von M derart, dass

$\forall a, b \in M$: genau dann aRb,

wenn $\exists A \in \mathcal{A} : a \in A$ und $b \in A$.

Beweis: Sei $[a] := \{ b \in M : aRb \}$
"Äq.klasse von a"

$\mathcal{A} = \{ [a] : a \in M \}$

Für $a, c \in M$ gilt $\begin{cases} [a] = [c] & \text{falls } aRc \\ [a] \cap [c] = \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$

denn: Falls aRc und $b \in [a]$,
dann aRb, cRa (Ä2) und cRb (Ä3)
also $b \in [c]$. Daher $[a] \subseteq [c]$
Falls aRc und $b \in [c]$,
dann cRb, (Ä3) aRb, also $b \in [a]$.
Daher $[c] \subseteq [a]$. Also $[a] = [c]$.

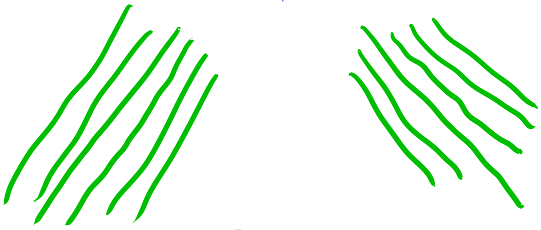
Falls nicht aRc: Wäre $b \in [a] \cap [c]$, dann
aRb und cRb, also bRc (Ä2)
aRc (Ä3) $\lightning$

Zu zeigen: $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = M$

$\forall a \in M$: aRa (Ä1), also $a \in [a]$, also
$\exists A \in \mathcal{A} : a \in A$, also $a \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. $\square$

Bsp $M =$ Geraden in $\mathbb{R}^2$, $R = \parallel$

$a \in M$



Winkel $0 \le \varphi < \pi$.

Def Ein El. einer Äq.klasse nennt man einen Repräsentanten.

Restklassen

Def Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.
$x, y \in \mathbb{Z}$ heißen <u>kongruent modulo m</u>
$x \equiv y \ (m)$, wenn $x - y$ durch m teilbar ist.

Beh $\equiv (m)$ ist Äq.rel.

Beweis (Ä1) $x \equiv x \ (m)$
weil $x - x = 0 = 0 \cdot m$

(Ä2) Wenn $x \equiv y \ (m)$, dann $x - y = km$, $k \in \mathbb{Z}$.
dann $y - x = (-k)m$, also $y \equiv x \ (m)$.

(Ä3) Wenn $x \equiv y \ (m)$ und $y \equiv z \ (m)$, dann
$x - y = km$, $y - z = \ell m$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. $x - z = x - y + y - z$
$= km + \ell m \Rightarrow x - z = (k+\ell)m \Rightarrow x \equiv z \ (m)$
$= (k + \ell)m$ $\square$