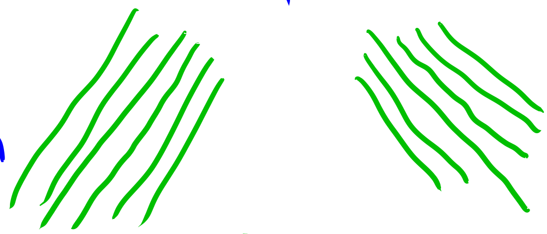
Bsp M = Geraden in $\mathbb{R}^2$, $R = \parallel$

$a \in M$



Winkel $0 \le \varphi < \pi$.

Def Ein El. einer Äq.klasse nennt man einen Repräsentanten.

Restklassen

Def Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

$x, y \in \mathbb{Z}$ heißen <u>kongruent modulo m</u>

$x \equiv y \ (m)$, wenn $x - y$ durch m teilbar ist.

Beh $\equiv (m)$ ist Äq.rel.

Beweis (Ä1) $x \equiv x \ (m)$

weil $x - x = 0 = 0 \cdot m$

(Ä2) Wenn $x \equiv y \ (m)$, dann $x - y = km$, $k \in \mathbb{Z}$.

dann $y - x = (-k)m$, also $y \equiv x \ (m)$.

(Ä3) Wenn $x \equiv y \ (m)$ und $y \equiv z \ (m)$, dann

$x - y = km$, $y - z = \ell m$, $k, \ell \in \mathbb{Z}$. $x - z = x - y + y - z$

$= km + \ell m \Rightarrow x - z = (k+\ell)m \quad \Rightarrow x \equiv z \ (m)$

$= (k+\ell)m$ $\square$

Bem $[x] = x + m\mathbb{Z}$

$= \{ y \in \mathbb{Z} : \text{Rest}(y : m) = \text{Rest}(x : m) \}$

$=:$ "Restklasse von x mod m"

$\mathbb{Z}_m = A = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}$

$\mathbb{Z}_2 = \{ \{\text{gerade}\}, \{\text{ungerade}\} \}$

In $\mathbb{Z}_{10}$ ist $[4]$

Beobachtung

$$\begin{array}{r} 324 \\ +\ 7102 \\ \hline \ldots\ldots 6 \end{array} \qquad 324 \cdot 7102 = \ldots 8$$

Beh Wenn $a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m)$

dann $a + c \equiv b + d \ (m)$

und $ac \equiv bd \ (m)$.

Beweis $a - b = km$, $c - d = \ell m$

$a + c - (b + d) = a - b + c - d = (k + \ell) m$

$$\begin{aligned} ac - bd &= ac - bc + bc - bd \\ &= (a - b)c + b(c - d) \\ &= (ck)m + (b\ell)m \\ &= (ck + b\ell)m \qquad \square \end{aligned}$$

<u>Folgerung</u> Auf $\mathbb{Z}_m$ sind $+, \cdot$ durch

$$[a] + [b] = [a+b]$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot c]$$ wohldefiniert.

<u>Fakt</u> $\mathbb{Z}_m$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.