# Vektorräume

**Def** Sei $\mathbb{K}$ Körper

Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist

$(V, +, \cdot)$ Menge $V \neq \emptyset$

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

"Skalarmultiplikation"

derart dass

$(V, +)$ abelsche Gruppe ist, also

(A1) $(u+v)+w = u+(v+w)$ $\forall u,v,w \in V$

(A2) $u+v = v+u$ $\forall u,v \in V$

(A3) $\exists 0 \in V$ $\forall u \in V$: $u+0 = u$

(A4) $\forall u \in V$ $\exists$ $-u \in V$:

$u+(-u) = 0$

(A5) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u \in V$

(A6) $1 \cdot u = u$

(A7) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall u,v \in V$

(A8) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\forall u \in U$

**Def** Sei $u \in V$.

Die El. $\alpha \cdot u$ heißen die Vielfachen von $u$.

**Bsp** $V = \mathbb{K}^n$ mit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, y_1 + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

ist $\mathbb{K}$-Vektorraum.

**Beachte** $V \ni 0 \neq 0 \in \mathbb{K}$

$+$ auf $V$ vs. $+$ auf $\mathbb{K}$

$\cdot$ auf $\mathbb{K} \times V$ vs. $\cdot$ auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$

**Bem** ÜA5

$0 \cdot u = 0$, $(-1) \cdot u = -u$

$\alpha \cdot 0 = 0$

**Def** Sei $(V, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$-VR

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt <u>Untervektorraum</u> oder <u>Unterraum</u> wenn $(U, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-VR ist.

**Proposition** 1) Sei $U \subseteq V$ derart, dass
- $\forall u, v \in U: u+v \in U$
- $\forall \alpha \in K \; \forall u \in U: \alpha \cdot u \in U$

dann ist $U$ ein Unterraum.

2) Umgekehrt ist jeder Unterraum ist abgeschl. unter $+$ und $\cdot$.

**Beweis** 1) $0 \in U$ weil $0 \cdot u = 0$, $u \in U$

$-u \in U \quad \forall u \in U$
weil $-u = (-1) \cdot u$
und Axiome in $U$ weil in $V$.

2) Sonst wäre $+$ keine Verkn. in $U$ und/oder $\cdot$ kein Abb. $\cdot : K \times U \to U$. $\square$

**Bsp** a) $\{0\}$ und $V$ sind UR von $V$.

b) Sind $U_1, U_2$ URe von $V$, dann ist $U_1 \cap U_2$ UR von $V$ (ÜA6)

c) URe von $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

d) $M^K$ (ÜA4)

In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist die Menge der Polynome

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

ein UR.