Proposition 1) Sei $U \subseteq V$ derart, dass
- $\forall u, v \in U: u+v \in U$
- $\forall \alpha \in K \ \forall u \in U: \alpha \cdot u \in U$

dann ist U ein Unterraum.

2) Umgekehrt ist jeder Unterraum ist abgeschl. unter $+$ und $\cdot$.

Beweis 1) $0 \in U$ weil $0 \cdot u = 0$, $u \in U$

$-u \in U \quad \forall u \in U$

weil $-u = (-1) \cdot u$

und Axiome in U weil in V.

2) Sonst wäre $+$ keine Verkn. in U und/oder $\cdot$ keine Abb. $\cdot : K \times U \to U$. $\square$

Bsp a) $\{0\}$ und V sind UR von V.

b) Sind U_1, U_2 URe von V, dann ist $U_1 \cap U_2$ UR von V (ÜA6)

c) URe von $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

d) M^K (ÜA4)

In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist die Menge der Polynome

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

ein UR.

Beweisskizze Die Summe 2er Poly ist Poly

Vielfaches von Poly ist Poly. $\square$

Bsp In $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ ist die Menge der Lösungen der Gl.

$$3x - 4y + 5z = 0.$$

ein UR.

Beweis Σ und Vielf. von Lsgen sind Lsgen:

$$\begin{array}{r} 3x - 4y + 5z = 0 \\ 3x' - 4y' + 5z' = 0 \\ \hline 3(x+x') - 4(y+y') + 5(z+z') = 0 \end{array}$$

$\square$

Bsp In $\mathbb{K}^n$ ist die Menge der Lsgen eines **homogenen linearen Gl.-Systems**

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ein UR.

Bsp In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist die Menge der Lsgen ~~des~~ der Differenzialgl. (Dgl)

$$f''(x) = -\omega^2 f(x)$$

mit geg. $\omega \in \mathbb{R}$ ein UR.

Allg. ist die Menge der Lsgen einer <u>homogenen linearen Dgl.</u>

$$a_n(x) f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + \ldots + \underset{a_1(x)}{\wedge} f'(x) +$$

$$a_0(x) f(x) = 0$$

mit geg. Fktnen $a_i(x)$ ein UR.

Bsp In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind URe:

- Menge der diffbaren Fktnen.
  $(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$
- Menge der stetigen Fktnen
- $C^k = \{$ k-mal stetig diff.baren Fktnen $\}$
- ebenso in $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \}$

In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{$Folgen$\}$ oder $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist

- $\{$konvergente Folgen$\}$
- $\{$Nullfolgen$\}$.

ein UR