1.17 Def Seien $v_1 \dots v_n \in V$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit } \alpha_1 \dots \alpha_n \in K$$

heißt eine <u>Linearkombination</u> <u>der $v_1 \dots v_n$</u>.

$\{$Lin.komb. von $v_1 \dots v_n\} =:$ Span $\{v_1 \dots v_n\}$

Spann
Aufspann
lineare Hülle

Für $\emptyset \neq M \subseteq V$ ist <u>Span (M)</u> $= \{$Lin.komb. von je endlich vielen Elementen von $M\}$

1.18 Bem Span (M) ist UR

Beweis $u \in \text{Span}(M) \Rightarrow u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ mit $u_j \in M$

$v \in \text{Span}(M) \Rightarrow v = \sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k$ mit $v_k \in M$

$$u + v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j + \sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k \in \text{Span}(M)$$

$$\alpha u = \sum_{j=1}^{n} (\alpha \alpha_j) u_j \in \text{Span}(M).$$

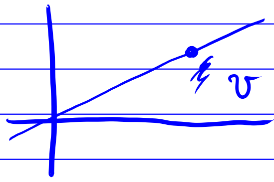
$\square$

1.20 Bspe

- Für $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{Span}\{v\} = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$$

= Gerade durch 0 und v



- Sind $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $u \nparallel v$ so ist $\mathrm{Span}\{u,v\}$ ~~eine~~ die Ebene durch $0, u, v$.

$$= \{su + tv : s,t \in \mathbb{R}\}.$$

Wenn $u \parallel v$, so ist $\mathrm{Span}\{u,v\}$ die ~~eine~~ Gerade durch $0, u, v$.

- In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sei $p_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathrm{Span}\{p_0, p_1, \dots, p_n\} = \{\text{Poly vom grad} \leq n\}$$

$$\mathrm{Span}\{p_0, p_1, p_2, \dots\} = \{\text{Poly}\}$$

1.19 Def $\emptyset \neq M \subseteq V$ heißt **Erzeugendensystem von V**, falls $\mathrm{Span}(M) = V$.

1.21 Def $v_1 \dots v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, falls $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in K$:

$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \neq (0 \dots 0)$ und

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Sonst heißen $v_1 \dots v_n$ linear unabh.

Bem $v_1 \dots v_n$ sind genau dann lin. unabh., wenn gilt: $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Bsp $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erz. system von $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = V$ und lin. abh., weil

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ lin. unabh. denn wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$.

1.22 Satz Sei $n \geq 2$.

$v_1 \dots v_n$ lin abh. $\Leftrightarrow$ einer ist lin. komb. der übrigen

Beweis "$\Rightarrow$": $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in K : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$ und $\alpha_m \neq 0$ für (mind.) ein $m \in \{1 \dots n\}$