sonst heißen $v_1 \dots v_n$ linear unabh.

Bem $v_1 \dots v_n$ sind genau dann lin. unabh., wenn gilt: $\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Bsp $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erz. system von $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = V$ und lin. abh., weil

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ lin. unabh. denn wenn

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dann $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$.

1.22 Satz Sei $n \geq 2$.

$v_1 \dots v_n$ lin abh. $\Leftrightarrow$ einer ist lin. komb. der übrigen

Beweis "$\Rightarrow$": $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in K : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$ und $\alpha_m \neq 0$ für (mind.) ein $m \in \{1 \dots n\}$

Dann $\alpha_m v_m = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{n} \alpha_j v_j$

$$v_m = + \sum_{j\neq m} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_m}\right) v_j \quad (QED)$$

"$\Leftarrow$": OBdA $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$

$(-1)\cdot v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n = 0$

also $v_1 \dots v_n$ lin. abh. $\square$

<u>Folgerung</u> Wenn $\{v_1 \dots v_n\}$ lin. unabh., dann auch jede Teilmenge.

1.21 <u>Def</u> $\emptyset \neq M \subseteq V$ heißt <u>lin. unabh.</u>, falls je endlich viele Vektoren aus M lin. unabh. sind.

1.23 <u>Bspe</u> a) In $\mathbb{K}^n$ sind die <u>kanonischen Basisvektoren</u> $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots$

$\dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

lin. unabh.: aus $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ folgt $\alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

b) Die Monome $p_k(x) = x^k$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $k = 0, 1, \dots, n$ sind lin. unabh.

<u>Beweis</u> Wenn $\alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_n p_n = 0$

dann $\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \quad \alpha_0 = 0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n$

$\uparrow$

Identitätssatz für Polynome (Analysis 1) $\square$

c) $M = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist lin. unabh.

$T \subseteq M$ endl. $\Rightarrow T \subseteq \{p_0, p_1 \dots p_n\}$ lin. unabh. $\square$