Basis

1.24 Def Basis = lin. unabh. Erz. system

1.26 Bsp a) kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$

b) Die Monome x^k bilden Basis des VRs der Polynome.

1.27 Bericht ohne Beweis: Jeder VR $\neq \{0\}$ ~~ein~~ besitzt eine Basis.

1.25 Satz $\{v_1 \dots v_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn

$$\forall v \in V \ \exists_1 \ (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j .$$

es gibt genau ein

Beweis "$\Rightarrow$": $\operatorname{Span}\{v_1 \dots v_n\} = V$

$\exists \ (\alpha_1 \dots \alpha_n)$: $v = \sum_j \alpha_j v_j$

Falls auch $v = \sum_j \beta_j v_j$, dann

$$0 = v - v = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) v_j \overset{\text{lin. unabh.}}{\Longrightarrow}$$

$$\alpha_j - \beta_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = \beta_j .$$

"$\Leftarrow$": Span $\{v_1 \ldots v_n\} = V$

$0 = \sum \alpha_j v_j$ mit eind. α_j

$\square$

1.28 <u>Satz</u> $\exists$ Basis aus n Vektoren

$\Rightarrow$ jede Basis hat n Vektoren.

1.29 <u>Def</u> Hat V eine Basis aus n Vektoren, dann ist seine <u>Dimension</u> $= n$, $\dim V = n$,

$\dim\{0\} = 0$

$\dim V = \infty$, falls V eine unendliche Basis hat.

1.30 <u>Lemma</u> $b_1 \ldots b_n$ Erz. system

$a_1 \ldots a_m$ lin. unabh.

Dann $m \leq n$.

<u>Frage</u>: Sind 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ immer lin abh.?

<u>Bsp</u>

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$c_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\x\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\y\end{pmatrix}$$

Beweis von Lemma 1.30

durch vollst. Induktion nach n

Wir zeigen: Wenn $b_1 \dots b_n$ Erz. Sys.

$m > n \Rightarrow a_1 \dots a_m$ lin. abh.

Anker: $n = 1$, $V = \operatorname{Span}\{b_1\}$

dann $a_j = \alpha_j b_1$, $\forall j = 1 \dots m \geq 2$

$\alpha_1 = 0 \Rightarrow$ lin abh.

$\alpha_2 = 0 \Rightarrow$ lin. abh.

$\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2 \Rightarrow a_2 = \alpha_2 b_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_1$

$\Rightarrow$ lin. abh.

Induktionsschritt $n-1 \Rightarrow n$:

Sei $\operatorname{Span}\{b_1 \dots b_n\} = V \ni a_1 \dots a_m$

$m > n$

$$a_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} b_k \quad \forall j$$

Falls alle $\alpha_{jk} = 0$, dann lin. abh.

Sagen wir $\alpha_{11} \neq 0$

$$c_j := a_j - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{11}} a_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_{jk} - \frac{\alpha_{j1}\alpha_{1k}}{\alpha_{11}}\right) b_k$$

$$\in \operatorname{Span}\{b_2 \dots b_n\}$$

$j = 2 \dots m$

$m-1 > n-1$, Induktionsvoraussetzung

$\Rightarrow$ $c_2 .. c_m$ lin. abh., d.h.

$\exists\, (\lambda_2 .. \lambda_m) \neq (0 \dots 0)$:

$$0 = \sum_{j=2}^{m} \lambda_j c_j = \sum_{j=2}^{m} \lambda_j \left(a_j - \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{11}} a_1\right)$$

$$= -\left(\sum_{j=2}^{m} \lambda_j \frac{\alpha_{j1}}{\alpha_{11}}\right) a_1 + \sum_{j=2}^{m} \lambda_j a_j$$

also $a_1 \dots a_m$ lin. abh. $\square$