1.32 Basisauswahlsatz

Sei $b_1 \dots b_n$ ein Erz.sys. von $V \neq \{0\}$.
Es gibt eine Teilmenge $T \subseteq \{b_1 \dots b_n\}$,
die Basis von V ist.

Beweis $B := \{b_1 \dots b_n\}$

$$\mathcal{T} := \{ S \subseteq B : \operatorname{Span} S = V \}$$

$\emptyset \neq \mathcal{T}$ weil $B \in \mathcal{T}$

Sei $j = \min \{ \underbrace{\# S}_{\in \mathbb{N} \cup \{0\}} : S \in \mathcal{T} \}$ und $S_0 \in \mathcal{T}$
mit $\# S_0 = j$.

Zeige: S_0 lin. unabh.

Wäre ein $b_k \in S_0$ eine Linkomb. der
übrigen in S_0, dann wäre

$$S_0 \setminus \{b_k\} \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad \#(S_0 \setminus \{b_k\}) < \# S_0 \quad \text{↯}$$

$\square$

1.31 Basisergänzungssatz

Sei $b_1 .. b_n$ Erz. sys. von V,

Falls $a_1 ... a_m$ lin. un. aber nicht Basis,

dann $\exists T \subseteq \{b_1 .. b_n\} : \{a_1 ... a_m\} \cup T$

ist Basis von V.

Beweis $A := \{a_1 \dots a_m\}$,

$M := \{a_1 \dots a_m, b_1 \dots b_n\}$

$$\mathcal{T} := \left\{ S \subseteq M : A \subseteq S \text{ und } \operatorname{span} S = V \right\}$$

$\emptyset \neq \mathcal{T}$ weil $M \in \mathcal{T}$.

Sei $j := \min\{\# S ; S \in \mathcal{T}\}$, und $S_0 \in \mathcal{T}$

mit $\# S_0 = j$. Zeige: S_0 l. u.

a) Falls $b_k \in S_0$ Lin. komb. der übrigen

El. von S_0, $S_0 \setminus \{b_k\} \in \mathcal{T}$, $\#(S_0 \setminus \{b_k\})$

$< \# S_0$ $\lightning$

b) Falls $a_j \in S_0$ Lin. komb. der übrigen

El. von S_0, $\{a_1 .. a_m\}$ l. u. $\Rightarrow$

mind. ein b_k hat Koeff. $\beta_k \neq 0$.

$$a_j = \beta_k b_k + \dots\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\beta_k}(+a_j) - \frac{1}{\beta_k} \dots\dots$$

weiter wie a) $\Rightarrow$ $\lightning$

$\square$

1.33 Korollar In einem n-dim VR bilden je n lin. un. Vektoren eine Basis.

Beweis $a_1 \dots a_n$ lin. un.

Wären keine Basis, dann $\overset{\text{BES}}{\Rightarrow}$

$\underbrace{\{a_1 \dots a_n, b_k \dots\}}_{\geq n+1 \text{ El.}}$ Basis ↯ $\square$