Dimensionsformel

Bem Ist U UR von V
und sind $\{v_1 \ldots v_n\}$ l.u. in U
dann auch in V.

1.34 **Bem** a) Ist U UR von V, dann
$$\dim U \leq \dim V$$
b) Ist überdies $\dim U < \infty$
$$\dim U = \dim V \iff U = V.$$

Beweis a) Falls $\dim V = \infty$, klar.
Falls $\dim V < \infty \Rightarrow$
$\exists$ Basis $\{b_1 \ldots b_n\}$ von V
Basis $\{a_1, a_2, \ldots \quad \}$ von U
$\Rightarrow$ lin. un. in U
$\Rightarrow$ lin. un. in V
Lemma 1.30 $\Rightarrow \#\{a_1, a_2 \ldots\} \leq n$ (QED)

b) "$\Leftarrow$": klar
"$\Rightarrow$": $\dim V =: n < \infty$
Sei $\{a_1 \ldots a_m\}$ Basis von U
$\Rightarrow$ lin. un. in $U \Rightarrow$ lin. un. in V
$\Rightarrow m = n$ und Kor 1.33
$\Rightarrow \{a_1 \ldots a_n\}$ ist Basis von V
$\Rightarrow U = V$ $\square$

1.35 Bem U_1, U_2 URe von V

$\Rightarrow U_1 \cap U_2$ auch UR (ÜA6)

$\dim(U_1 \cap U_2)$

1.36 Def Summe ("Summenraum")

$$U_1 + U_2 = \{ u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \} \subseteq V$$

Bem $U_1 + U_2 = \mathrm{Span}(U_1 \cup U_2)$ ist UR von V.

1.38 Satz ("Dimensionsformel")

Seien U_1, U_2 endl.-dim. URe von V

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 .$$

Beweis Sei $\{v_1 \dots v_r\}$ Basis von $U_1 \cap U_2$.

BES $\Rightarrow \exists \{v_1 \dots v_r, w_1 \dots w_s\}$ Basis von U_1

$\Rightarrow \exists \{v_1 \dots v_r, z_1 \dots z_t\}$ Basis von U_2.

Beh $\{v_1, \dots v_r, w_1 \dots w_s, z_1 \dots z_t\}$ Basis von $U_1 + U_2$.

Beweis der Beh. a) Erz. sys.:

$$U_1+U_2 \ni v = u_1 + u_2$$
$$= \sum \alpha_j v_j + \sum \beta_k w_k + \sum \gamma_j v_j + \sum \delta_\ell z_\ell$$
$$= \sum (\alpha_j + \gamma_j) v_j + \sum \beta_k w_k + \sum \delta_\ell z_\ell$$

b) lin. un.: Sei $0 = \sum \alpha_j v_j + \sum \beta_k w_k + \sum \gamma_\ell z_\ell$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum (-\gamma_\ell) z_\ell}_{\in U_2} = \underbrace{\sum \alpha_j v_j + \sum \beta_k w_k}_{\in U_1} \in U_1 \cap U_2$$

$\Rightarrow \sum (-\gamma_\ell) z_\ell = \sum \delta_j v_j$ weil $\{v_j\}$ Basis von $U_1 \cap U_2$

$\{v_j \ldots z_\ell \ldots\}$ Basis

$\Rightarrow$

$$0 = \sum \delta_j v_j + \sum \gamma_\ell z_\ell$$
$$\Rightarrow \delta_j = 0 = \gamma_\ell$$

Ebenso $\beta_k = 0$.

Weil $\{v_1 \ldots v_r\}$ lin. un., $\alpha_j = 0$ $\Rightarrow$ Beh.

$\dim U_1 \cap U_2 = r$

$\dim U_1 = r + s$

$\dim U_2 = r + t$

$\dim (U_1 + U_2) = r + s + t$

li. Seite $= 2r + s + t$

re. Seite $= 2r + s + t$ $\square$