Kap 2: Lineare Abbildungen

Def Seien V, W $\mathbb{K}$-VRe

$L: V \to W$ heißt lineare Abb

oder Homomorphismus von VRen,

wenn

$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in V$

$L(\alpha u_1) = \alpha L(u_1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall u_1 \in V$

$\{\text{Homomorphismen}\} = \mathrm{Hom}(V, W)$

$= \mathcal{L}(V, W)$

Notation $Lu := L(u)$

"Operatoren" (bes. $\dim V = \infty = \dim W$)

wenn $W = \mathbb{K}$, $L: V \to \mathbb{K}$

"Linearformen, 1-Formen,
Kovektoren, duale Vektoren,
lineare Funktionale".

Bem • $\mathcal{L}(V, W)$ ist $\mathbb{K}$-VR mit

$(S+T)(u) = S(u) + T(u)$

$(\alpha S)(u) = \alpha S(u) \quad \forall u \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $L\, 0_V = 0_W$
- Komposition von linearen S, T ist wieder linear.

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)) \quad \forall u \in V$$

$$T : V \to W$$
$$S : W \to U$$

$$T \in \mathcal{L}(V, W), \quad S \in \mathcal{L}(W, U)$$
$$\Rightarrow S \circ T \in \mathcal{L}(V, U). \qquad (\text{ÜA})$$

<u>Bspe</u>

- Nulloperator $Lu = 0 \quad \forall u \in V$

  "$L = 0$"

- Identität $Lu = u \quad \forall u \in V$

  $L : V \to V$

  "$L = \mathrm{Id}$", "$L = I$", "$L = 1$"

  "$L = \mathbb{1}$"

- Ableitungsoperator $D : C^1(I) \to C(I)$

  $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall,

  $$D u = u' = \frac{du}{dx}.$$

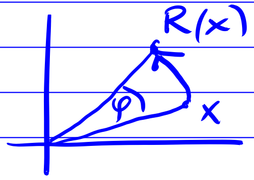
- Das Integral

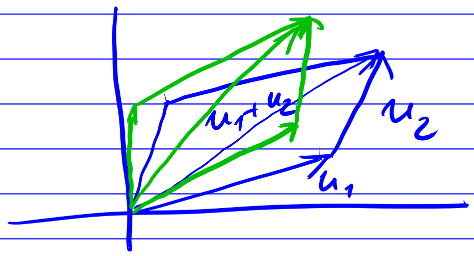
  $$u \mapsto \int_a^b u(x)\, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}}$$

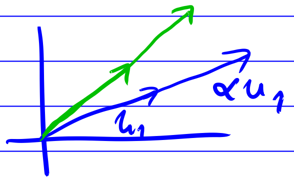
ist eine Linearform $C([a,b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

• Drehung $R = R_\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist linear





$Ru_1 + Ru_2 = R(u_1+u_2)$



$R(\alpha u_1) = \alpha R(u_1)$

∘ Mult mit Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist linear:

$$A(u+v) = A\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{11}v_1 + a_{12}u_2 + a_{12}v_2 \\ a_{21}u_1 + a_{21}v_1 + a_{22}u_2 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

$$= Au + Av.$$

$$A(\alpha u) = A\begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} \cancel{\alpha}(a_{11}\alpha u_1 + a_{12}\alpha u_2) \\ \cancel{\alpha}(a_{21}\alpha u_2 + a_{22}\alpha u_2) \end{bmatrix} = \alpha A u.$$