Kern und Bild

injektiv und surjektiv
(Nicolas Bourbaki 1939)

Def $f: A \to B$ heißt injektiv $:\Longleftrightarrow$

$\forall a_1 \neq a_2 \in A: \quad f(a_1) \neq f(a_2)$

$f: A \to B$ heißt surjektiv $:\Longleftrightarrow$

$\forall b \in B: \exists a \in A, \quad f(a) = b.$

$f: A \to B$ heißt bijektiv $:\Longleftrightarrow$

f ist inj. und surj.

Bsp
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$
- $f: \underbrace{[0,\infty)}_{\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}} \to [0,\infty), \quad f(x) = x^2$
- Permutationen:

  $f: \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$

Bek $g: A \to B, \; f: B \to C$

a) Wenn f, g inj., dann $f \circ g$ inj.

b) Wenn f, g surj., dann $f \circ g$ surj.

Beweis a) $a_1 \neq a_2 \overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} g(a_1) \neq g(a_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow}$

$f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$.

b) Für $c \in C$: $c \overset{f \text{ surj.}}{=} f(b) \overset{g \text{ surj.}}{=} f(g(a))$ $\square$

Bem $f: A \to B$

a) f inj $\iff \exists g: B \to A: g \circ f = id_A$

Linksinverse

b) f surj $\iff \exists g: B \to A: f \circ g = id_B$

Rechtsinverse

c) f bij $\Rightarrow$ $\exists_1$ Linksinv.,

$\exists_1$ Rechtsinv.,

Linksinv = Rechtsinve.

und ist bij.

2.5 Def Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$

$$\text{Bild } L := \{Lu : u \in V\} \subseteq W$$

$$= \text{im } L = \text{rg } L$$ "image, range"

$$\text{Kern } L := \{u \in V : Lu = 0\} \subseteq V$$

$$= \text{"Nullraum"} = \ker L$$ "kernel"