Beweis a) $a_1 \neq a_2 \overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} g(a_1) \neq g(a_2) \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow}$

$f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$.

b) Für $c \in C$: $c \overset{f \text{ surj.}}{=} f(b) \overset{g \text{ surj.}}{=} f(g(a))$ $\square$

Beh $f: A \to B$

a) f inj $\Longleftrightarrow \exists g: B \to A: g \circ f = id_A$

Linksinverse

b) f surj $\Longleftrightarrow \exists g: B \to A: f \circ g = id_B$

Rechtsinverse

c) f bij $\Longrightarrow$ $\exists_1$ Linksinv.,

$\exists_1$ Rechtsinv.,

Linksinv = Rechtsinve.

und ist bij.

2.5 Def Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$

$\text{Bild } L := \{ Lu : u \in V \} \subseteq W$

$= \text{im } L = \text{rg } L$ "image, range"

$\text{Kern } L := \{ u \in V : Lu = 0 \} \subseteq V$

$=$ "Nullraum" $= \ker L$

"kernel"

2.6 Satz Bild L ist UR von W

Kern L ist UR von V.

Beweis überprüfe abg. unter $+, \cdot$. $\square$

2.7 Bsp. Für $a \in \mathbb{R}^3$ sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Lu = a \cdot u := \sum_{j=1}^{3} a_j u_j .$$

$$\text{Bild } L = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } a = 0 \\ \mathbb{R} & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Kern } L = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{falls } a = 0 \\ \text{Ebene} \perp a & \text{falls } a \neq 0 \end{cases}$$

2.8 Bem Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$.

$$L \text{ inj} \iff \text{Kern } L = \{0\}.$$

Beweis "$\Leftarrow$": Wenn Kern $L = \{0\}$, dann

$\underline{Lv_1 = Lv_2} \implies Lv_1 - Lv_2 = 0$

$\implies L(v_1 - v_2) = 0 \implies v_1 - v_2 \in \text{Kern } L$

$\implies v_1 - v_2 = 0 \implies \underline{v_1 = v_2}$ also L inj.

"$\Rightarrow$": Wenn Kern $L \neq \{0\}$, dann $\exists v \neq 0$:

$Lv = 0 = L0$, also L nicht inj. $\square$

$A \iff B$: $A \Rightarrow B$

(nicht-A) $\Rightarrow$ (nicht-B).

2.9 Def $L \in \mathcal{L}(V,W)$ heißt

Monomorphismus falls L inj.
Epimorphismus falls L surj.
Isomorphismus L bij.
Endomorphismus falls $V = W$
Automorphismus $V = W$ und L bij.

2.10 Satz Sei $\dim V = n < \infty$, $L \in \mathcal{L}(V,W)$. Dann

$$\dim \operatorname{Kern} L + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} L}_{=: \operatorname{Rang} L} = n$$

Bew Falls $L = 0$: $\operatorname{Kern} L = V$ $\dim = n$
$\operatorname{Bild} L = \{0\}$ $\dim = 0$
$\Sigma\ n$

Falls $L \neq 0$: $m := \dim \operatorname{Kern} L < n$
Wähle Basis $\{b_1 \dots b_m\}$ von $\operatorname{Kern} L$
BES ergänze zu Basis $\{b_1 \dots b_m, b_{m+1} \dots b_n\}$ von V

Beh $\{L b_{m+1}, \dots, L b_n\}$ ist Basis von $\operatorname{Bild} L$.

a) EZ. Sys., d.h. $\text{Bild } L = \operatorname{Span}\{L b_{m+1}, \dots, L b_n\}$

"$\supseteq$": $\Leftarrow L b_{m+1}, \dots, L b_n \in \text{Bild } L$

"$\subseteq$": Für bel. $u \in \text{Bild } L$:

$$u = Lv, \quad v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$$

$$\Rightarrow u = L\left(\sum \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{L b_j}_{0 \text{ für } j \le m}$$

$$= \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j L b_j \in \operatorname{Span}\{L b_{m+1} \dots L b_n\}$$

b) $\underline{L b_{m+1} \dots L b_n}$ lin. un.:

Sei $\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j L b_j = 0$, $\quad u := \sum_{j=m+1} \alpha_j b_j$

$$\underline{Lu} = L\left(\sum \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j L b_j = \underline{0}$$

also $u \in \operatorname{Kern} L$. Falls $m = 0$: $\operatorname{Kern} L = \{0\}$
$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 = \dots = \alpha_n$

Falls $m \neq 0$:

$$u \in \operatorname{Kern} L \Rightarrow u = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j b_j$$

$$\Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 = \dots = \alpha_n$$

$$\beta_1 = 0 = \dots = \beta_m. \qquad \square$$