

2.11 Satz Sei $(v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V .

Zu bel. geg. Vektoren $b_1, \dots, b_n \in W$

gibt es genau eine $L \in \mathcal{L}(V, W)$ mit

$$L(v_1) = b_1$$

$$\vdots$$
$$L(v_n) = b_n.$$

Daher ist L durch die $b_1, \dots, b_n$ eind.

beschrieben.

Beweis Existenz: $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \in V$

setze $L u := \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j \in W$

Dann ist L linear: für $w = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \in V$

$$\underline{L(u+w)} = L\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) v_j\right)$$

~~$$= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) L(v_j)$$~~

$$= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) b_j$$

$$= \sum \alpha_j b_j + \sum \beta_j b_j$$

$$= \underline{L u} + L w$$

$$\begin{aligned}
 \underline{L(\lambda u)} &= L\left(\sum (\lambda \alpha_j) v_j\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n (\lambda \alpha_j) b_j \\
 &= \lambda \sum \alpha_j b_j = \underline{\lambda Lu}
 \end{aligned}$$

Außerdem $L v_j = b_j$.

Eindeutigkeit: Für $u = \sum \alpha_j v_j$ ist

$$\begin{aligned}
 Lu &= L\left(\sum \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{L v_j}_{b_j} \\
 &= \sum \alpha_j b_j. \quad \square
 \end{aligned}$$

Terminologie "V isomorph zu W"

$\Leftrightarrow \exists$ Isomorphismus: $V \rightarrow W$

Beim "isomorph" ist eine Äq. rel.

Beweis reflexiv: $\text{id}: V \rightarrow V$

$\text{id}(u) = u$ ist Isom.

symmetrisch: Wenn $L: V \rightarrow W$ Isom.,

dann $L^{-1}: W \rightarrow V$ bij. und linear:

$$\underline{\text{denn } L^{-1}(w_1 + w_2) = L^{-1}(L v_1 + L v_2)}$$

$$= L^{-1}(L(v_1 + v_2))$$

$$= (L^{-1} \cdot L)(v_1 + v_2)$$

$$= \text{id}(v_1 + v_2)$$

$$= v_1 + v_2$$

$$= \underline{L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)}$$

$$L^{-1}(\lambda w) = L^{-1}(\lambda L(v))$$

$$= L^{-1}(L(\lambda v))$$

$$= \lambda v = \lambda L(w).$$

transitiv $L: V \rightarrow W, M: W \rightarrow U$

$M \circ L: V \rightarrow U$ bij., linear

□

2.13 Korollar Sei $\dim V = n$.

Jede geordnete Basis $(v_1 \dots v_n) =: \alpha$ definiert einen Isom. $(\)_\alpha: V \rightarrow K^n$

durch $u = \sum \alpha_j v_j \mapsto (u)_\alpha := (\alpha_1 \dots \alpha_n)$.

Insbes. ist jeder n -dim VR isom. zu K^n ,

2 VR V, W ~~sind~~ sind isom.

endl. - dim. $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Beweis $(\)_\alpha$ ist lin., inj., surj. klar.

$L: V \rightarrow W$ Isom.

$$\dim \underbrace{\text{Kern } L}_{\{0\}} + \dim \underbrace{\text{Bild } L}_W = \dim V$$

$$\underbrace{\phantom{\dim \{0\}}}_{0} + \underbrace{}_{\dim W} \quad \square$$