Matrix

2.14 Def Sei $\mathcal{A} = (v_1 \dots v_n)$ geor. Basis von V

$\mathcal{B} = (w_1 \dots w_m)$ geor. Basis von W

$L \in \mathcal{L}(V, W)$

Die Gl. $$L v_k = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j$$

definiert die Einträge $a_{jk} \in \mathbb{K}$ der <u>Matrix von L bezügl. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$</u>

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen heiße $M(m \times n, \mathbb{K})$ oder $\mathbb{K}^{m \times n}$; sie ist $\mathbb{K}$-VR mit eintragsweiser Add. und Sk. mult.

2.15 Bem $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M(m \times n, \mathbb{K})$ ist Isom.

$L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(M)$, $\quad L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} : M(m \times n, \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(V, W)$

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M(m \times n, \mathbb{K})}$$

$$L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(V, W)}$$

2.16 Merkregel Die Spalten von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(L)$ sind die Bilder von v_k bzgl. $\mathcal{B}$

$$(Lv_k)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = k\text{-te Spalte}$$

2.17 Bem Im Fall $V=W$ bietet sich $\mathcal{B}=\mathcal{A}$ an,

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L) =: M_{\mathcal{B}}(L).$$

2.18 Bsp

- Identität: $\mathrm{id}_V = \mathbb{1}_V$. Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist

$$M_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}_V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_n$$

$$\boxed{M = (a_{jk})_{jk}} = (\delta_{jk})_{jk} \quad \text{„Einheitsmatrix“}$$

Kronecker-Symbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j=k \\ 0 & \text{für } j\neq k. \end{cases}$$

(Falls $\mathcal{A}\neq\mathcal{B}$, dann $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathbb{1}_V) \neq E_n$.)

- Nullmatrix

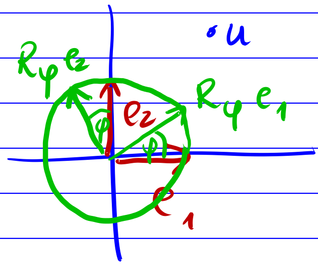
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(0) = 0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

Nullabb.   Nullmatrix $(m \times n)$

- Drehung $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$R_\varphi e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$R_\varphi e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$M_{\mathcal{K}}(R_\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ +\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\mathcal{K} = (e_1, e_2)$

kanonische Basis

Daher $R_\varphi \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R_\varphi (u_1 e_1 + u_2 e_2)$

$$= u_1 R_\varphi(e_1) + u_2 R_\varphi(e_2)$$

$$= u_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= M_{\mathcal{K}}(R_\varphi) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$ gemäß

Matrix·Vektor-Regel

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{bmatrix}$$

∘ Allg. $L: V \to W$, $\mathcal{A} = (v_1 .. v_n)$ in V

$\mathcal{B} = (w_1 .. w_m)$ in W

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k L v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j$$

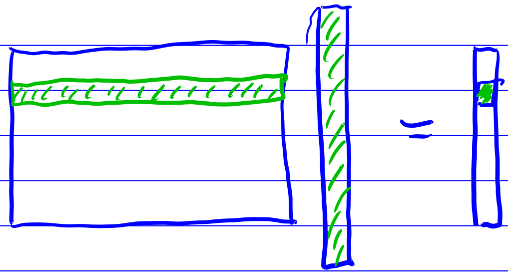
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk}\right)}_{y_j} w_j$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad y_j, \quad \sum y_j w_j$$

$$\boxed{y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k .}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

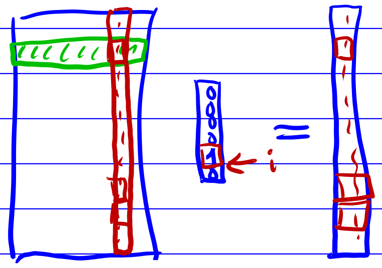
Matrix · Vektor-Regel



Zeile$_j$ · Spalte = Eintrag$_j$

Punktprodukt

$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n$



in Formeln: $x_k = \delta_{ik} \Rightarrow$

$$\underline{y_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\delta_{ik} = \underline{a_{ji}}$$