

Matrix multiplication

2.22 Satz Seien U, V, W $\mathbb{K}$ -VRen

$\mathcal{A} = (u_1 \dots u_n)$ geor. Basis in U

$\mathcal{B} = (v_1 \dots v_m)$ in V

$\mathcal{C} = (w_1 \dots w_\ell)$ in W

$T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$

$A := (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(S)$, $B := (b_{ij}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(T)$,

$C := (c_{ij}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(S \circ T)$. Dann ist

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$$

Def $A \cdot B = AB = C$

Beweis $(S \circ T) u_k = \sum_{i=1}^{\ell} c_{ik} w_i$

$$T u_k = \sum_{j=1}^m b_{jk} v_j, \quad S v_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ij} w_i$$

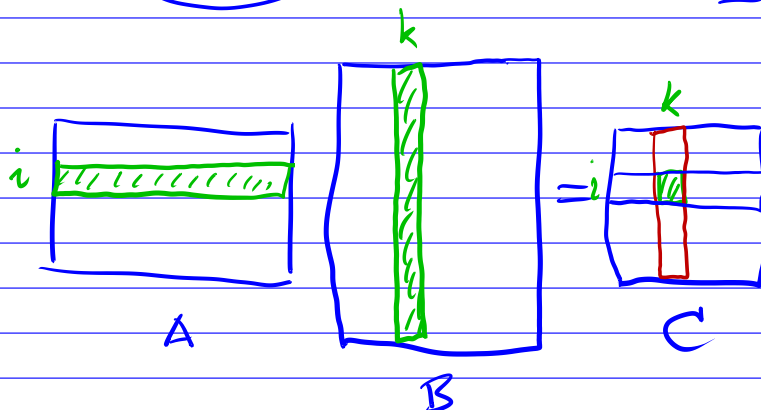
also $S(T u_k) = S\left(\sum_{j=1}^m b_{jk} v_j\right)$

$$= \sum_{j=1}^m b_{jk} S v_j = \sum_{j=1}^m b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{\ell} a_{ij} w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m \underbrace{b_{jk} a_{ij}}_{a_{ij} b_{jk}} \right) w_i = \sum_{i=1}^l c_{ik} w_i$$

□

Merksatz



Zeile i · Spalte k = Eintrag ik

$l \times m$ $m \times n$ $l \times n$

• Vektor = $\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = n \times 1$ - Matrix

Matrix-Vektor ist Spezialfall
von Matrix-Matrix.

• Spalten von B einzeln:

$$A \cdot \underbrace{B_{\square k}}_{k\text{-te Spalte}} = C_{\square k}$$

• Spalten von C = A · Spalten von B.

- Zeilen von A einzeln:

$$\begin{array}{ccc} 1 \times m & m \times n & 1 \times n \\ A_{i\Box} \cdot B & = & C_{i\Box} \\ \underbrace{\phantom{A_{i\Box}}} & & \uparrow \\ i\text{-te Zeile} & & i\text{-te Zeile von } C \end{array}$$

- Punktprodukt in $\mathbb{R}^n$: $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$

ist Spezialfall

$$\begin{array}{ccc} 1 \times n & n \times 1 & 1 \times 1 \\ \boxed{x} \cdot \boxed{y} & = & \boxed{} \\ x & & \uparrow \\ & & \text{Skalar} \end{array}$$

$$c_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^m b_{jk} a_{ij}$$

- Im allg. $BA \neq AB$.
meistens nicht mal def.

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & = & C \\ l \times m & m \times n & l \times n \end{array}$$

$$\nexists B \cdot A$$

Selbst wenn $n = l$, hat BA Format $m \times m$

Selbst wenn $l = m$, ist (oft) $BA \neq AB$
manchmal