2.26 Satz

$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B+C) = (AB) + (AC)$$
$$(A+B)C = (AC) + (BC)$$

Beweis folgt aus den Eigenschaften der lin. Abb.en

Bsp: $R \circ (S+T)(u) = R(Su + Tu)$

$$= R(Su) + R(Tu)$$
$$= (R \circ S)(u) + (R \circ T)(u) \qquad \square$$

Bem Diagonalmatrix $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

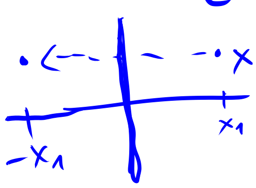
$a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$a_{ii} = \alpha_i$ $\qquad = $ "$\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$"

wirkt so $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \vdots \\ \alpha_n x_n \end{bmatrix}$, daher

$$\mathrm{diag}(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \cdot \mathrm{diag}(\beta_1 \ldots \beta_n)$$
$$= \mathrm{diag}(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n)$$

Bsp $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$



$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad Ax = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Spiegelung an x_2-Achse

2.29 **Def** Eine **Algebra** ist ein K-VR V mit Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$

mit

(M1) ass.

(M2) links-distr.

(M3) rechts-distr.

(M4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$M(n,\mathbb{K}) := M(n \times n, \mathbb{K})$ ist (für $n \geq 2$) eine nicht-kommutative Algebra mit Einselement.

Notation $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear

$$M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(A) = A$$

Def Der **Rang** einer $m \times n$-Matrix A

ist $\operatorname{Rg} A := \dim \underbrace{\operatorname{Bild} A}_{= \{Ax \,:\, x \in \underbrace{\mathbb{K}^n}_{= \mathbb{K}^{n \times 1}}\}}$

Bem $\operatorname{Rg} A \leq \min(m,n)$

denn $\operatorname{Bild} A \subseteq \mathbb{K}^m$

und Dim-Formel:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Kern} A}_{\geq 0} + \underbrace{\operatorname{Rg} A}_{\leq n} = n$$