2.29 **Def** Eine **Algebra** ist ein K-VR V mit Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$ mit

(M1) ass.

(M2) links-distr.

(M3) rechts-distr.

(M4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$M(n,\mathbb{K}) := M(n\times n, \mathbb{K})$ ist (für $n \geq 2$) eine nicht-kommutative Algebra mit Einselement.

Notation $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear

$$M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(A) = A$$

Def Der **Rang** einer $m\times n$-Matrix A ist $\operatorname{Rg} A := \dim \underbrace{\text{Bild } A}_{=\{Ax \,:\, x \in \underbrace{\mathbb{K}^n}_{=\mathbb{K}^{n\times 1}}\}}$

Bem $\operatorname{Rg} A \leq \min(m,n)$

denn $\text{Bild } A \subseteq \mathbb{K}^m$

und Dim-Formel:

$$\underbrace{\dim \operatorname{Kern} A}_{\geq 0} + \underbrace{\operatorname{Rg} A}_{\leq n} = n$$

2.31 Satz Sei $\dim V = \underbrace{\dim W}_{=n} < \infty$.

Für $L \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt

$$L \text{ bij} \Leftrightarrow L \text{ inj} \Leftrightarrow L \text{ surj}.$$

Beweis L inj $\Leftrightarrow \operatorname{Kern} L = \{0\}$

dim Kern + dim Bild = n

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Kern} L = 0$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Bild} L = n$

$\Leftrightarrow \operatorname{Bild} L = W$

$\Leftrightarrow L$ surj. $\square$

Bem analog: Ist $f: A \to B$, $\# A = \# B < \infty$, so gilt

$$f \text{ bij} \Leftrightarrow f \text{ inj} \Leftrightarrow f \text{ surj}.$$

Bem Ist $\dim V = \infty = \dim W$, $L \in \mathcal{L}(V,W)$

mögl: L surj, nicht inj.

Bsp: $V = W = \{\text{Polynome}\}$

$$L = \frac{d}{dx}$$

Bem Wenn $f: A \to B$ bij

$g: B \to C$ bij, dann

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$(g \circ f)(a) = c$

$g(b) = c, \quad b = g^{-1}(c)$

$f(a) = b, \quad a = f^{-1}(b)$

$a = f^{-1}(g^{-1}(c))$.