2.33 Def $A \in M(n, \mathbb{K})$ heißt <u>invertierbar</u> oder <u>regulär</u> $\Leftrightarrow \exists B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$AB = E_n = BA.$$

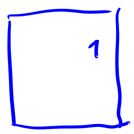
Notation: $B =: A^{-1}$.

Andernfalls heißt A <u>singulär</u>.

(Die meisten A sind regulär

$\dim M(n, \mathbb{K}) = n^2$, $\dim \{\text{singuläre}\} = n^2 - 1$)

kein VR



2.34 Satz a) A^{-1} ist eind. best.

b) Sei $A = M_{\mathcal{B}}(L)$. (bzw. $L = L_{\mathcal{B}}(A)$)

A inv.bar $\Leftrightarrow$ L bij.

und $A^{-1} = M_{\mathcal{B}}(L^{-1})$.

c) Wenn $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ und $AB = E$, dann sind A, B inv.bar und zu einander invers, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

<u>Beweis</u> b) "$\Leftarrow$": $B := M_{\mathcal{B}}(L^{-1})$,

$$L^{-1} \circ L = \mathrm{id}_V = L \circ L^{-1}$$

daher $\underbrace{M_{\mathcal{B}}(L)}_{A} \underbrace{M(L^{-1})}_{B} = E = \underbrace{M(L^{-1})}_{B} \underbrace{M(L)}_{A}$

"$\Rightarrow$": Sei $AB = E = BA$

$$\underbrace{L(A)}_{L}\ \underbrace{L(B)}_{T} = \underbrace{L(E)}_{id} = \underbrace{L(B)}_{T}\ \underbrace{L(A)}_{L}$$

$$L\ T = id = T\ L$$

$\Rightarrow L$ bij, $T = L^{-1}$.

a) weil L^{-1} eind.

c) $AB = E \Rightarrow \underbrace{L(A)}_{\substack{\text{surj} \\ \& \text{ bij}}}\ \underbrace{L(B)}_{\substack{\text{inj.} \\ \& \text{ bij.}}} = id$

$\Rightarrow L(B)\ L(A) = id$

$\Rightarrow BA = E$. $\square$

<u>Folgerung</u> $A \in M(n, \mathbb{K})$:

A regulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = n$.

<u>Beweis</u> A regulär $\Leftrightarrow L$ bij

$\overset{2.31}{\Leftrightarrow} L$ surj.

$\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Bild} L}_{\operatorname{Bild} A} = \mathbb{K}^n$

$\Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = n$ $\square$

<u>Bsp</u> $\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1}$

$= \operatorname{diag}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1})$

(existiert wenn $\alpha_j \neq 0\ \forall j$)

Bsp $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$

Bew $R_\varphi R_{-\varphi} = R_{\varphi-\varphi} = R_0$

$$= \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.47 **Bem**: In 2d explizite Formel für A^{-1} von $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Anwendung Wenn $A \in M(n, \mathbb{K})$ inv. bar, dann

$$A x = b \qquad b \in \mathbb{K}^n, \ x \in \mathbb{K}^n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} A}_{E} x = A^{-1} b$$

$$\underbrace{}_{x} = A^{-1} b.$$