

Basiswechsel

Seien $\mathcal{A} = (a_1 \dots a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1 \dots b_n)$

Basen von V .

Problem $(u)_{\mathcal{A}} = x \in K^n$

$(u)_{\mathcal{B}} = y \in K^n$

Berechne y aus x .

Antwort Sei $b_j = \sum_{k=1}^n s_{kj} a_k$. Dann

$$\sum_{k=1}^n x_k a_k = u = \sum_{j=1}^n y_j b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{k=1}^n s_{kj} a_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{kj} y_j \right) a_k \Rightarrow$$

$$x_k = \sum_{j=1}^n s_{kj} y_j \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x = Sy}}$$

$$\text{mit } S = (s_{kj})_{kj}$$

Bem $S = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\underbrace{1_V}_L)$

(Def $\underbrace{L}_{\mathcal{B}_j} \underbrace{e_j}_{\mathcal{B}_j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{(s_{kj})}_{\text{circled}} a_k$)

Folglich $\underline{y} = \underline{S}^{-1} x$ und $\underline{S}^{-1} = \underline{M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(1_V)}$

Problem $L \in \mathcal{L}(V, V)$

$A := M_{\mathcal{A}}(L), \quad B := M_{\mathcal{B}}(L)$

Berechne B aus A.

2.36 Antwort $(u)_{\mathcal{A}} = x, (u)_{\mathcal{B}} = y,$

$(Lu)_{\mathcal{A}} = Ax, (Lu)_{\mathcal{B}} = By.$

$x = Sy, y = S^{-1}x, \text{ also } By =$

$= (Lu)_{\mathcal{B}} = S^{-1}(Lu)_{\mathcal{A}} = S^{-1}Ax$

$= \underline{S^{-1}AS} y.$

$\Rightarrow \underline{B = S^{-1}AS}.$

2.38 Def $A, B \in M(n, K)$ heißen

ähnlich, wenn es eine reguläre

$S \in M(n, K)$ gibt mit $B = S^{-1}AS.$

Bem Ähnlichkeit ist Äq. rel.

Beweis reflexiv: $S = I = E \Rightarrow A = S^{-1} A S$

symmetrisch: $T = S^{-1} \overset{B=S^{-1}AS}{\Rightarrow} B = T A T^{-1}$
 $\Rightarrow T^{-1} B T = T^{-1} T A T^{-1} T \Rightarrow A = T^{-1} B T$

transitiv: $B = S^{-1} A S$, $C = T^{-1} B T$

$$\Rightarrow \underline{C} = T^{-1} (S^{-1} A S) T$$

$$= \underline{(S T)^{-1} A (S T)} \quad \begin{pmatrix} S \rightarrow \\ S T \end{pmatrix}$$

□