**2.39 Def** $A \in M(m \times n, K)$

Spaltenrang $(A)$ = max. Zahl lin. unabh. Spalten

Zeilenrang $(A)$ = max. Zahl lin. unabh. Zeilen.

**Bem** $\text{Bild}(A) = \text{Span}\{\text{Spalten}(A)\}$

$\Rightarrow$ Spaltenrg $(A) = \dim \text{Bild}(A) = Rg(A)$.

Zeilenrg $(A) = \dim \text{Span}\{\text{Zeilen}(A)\}$

**2.40 Satz** Zeilenrang = Spaltenrang.

**Beweis**

$j$-te Spalte von $A$ heiße linear überflüssig $\Leftrightarrow$ ist Lin. komb. der übrigen.

**Bsp** Sei $j$-te Spalte lin. üb., lasse sie weg: $A' \in M(m \times (n-1), K)$

Spaltenrg $(A')$ = Spaltenrg $(A)$

**Lemma** Zeilenrg $(A')$ = Zeilenrg $(A)$

Bew des Lemmas: wissen $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n$:

$$a_{kj} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i a_{ki} \quad \forall k = 1 \dots m$$

$$A = (a_{ki})$$

Beh: Lin. komb. von Zeilen $(A') = 0$

$\Leftrightarrow$ dieselbe Lin. komb. von Zeilen $(A) = 0$

D.h.: $\left( \sum_{k=1}^{m} \beta_k a_{ki} = 0 \ \forall i \right)$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^{m} \beta_k a_{ki} = 0 \ \forall i \neq j \right)$$

denn $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \beta_k a_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i a_{ki} \right)$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \underbrace{\left( \sum_{k=1}^{m} \beta_k \cancel{\alpha_i} a_{ki} \right)}_{0} = 0.$$

$\Rightarrow$ Beh $\square$

Also: Eine Menge von Zeilen von $A$ ist lin. un. $\Leftrightarrow$ dieselbe Menge von Zeilen von $A'$ entspr. ist lin. un.

$\Rightarrow$ Lemma $\square$

Ebenso: Weglassen einer lin. üb. Zeile ändert den Spaltenrg nicht.

Lasse lin. ab. Zeilen und Spalten von A weg, bis alle Zeilen und Spalten lin. un. sind $\rightsquigarrow A'$.

$$A' \in M(z \times s, \mathbb{K})$$

$$\text{Zeilenrg}(A) = \text{Zeilenrg}(A') = z$$

$$\text{Spaltenrg}(A) = \text{Spaltenrg}(A') = s$$

$$\underbrace{\text{Spalten}(A')}_{\substack{s\text{-Tupel} \\ \text{lin. un.}}} \overset{\text{in}}{\in} M(z \times 1, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^z \quad \Rightarrow \quad s \leq z$$

$$\text{Zeilen}(A') \text{ lin. un. } z\text{-Tupel in } \overbrace{M(1 \times s, \mathbb{K})}^{\dim = s}$$

$$\Rightarrow z \leq s$$

$$\Rightarrow s = z \Rightarrow \text{Satz.} \ \square$$