Def Elementare Zeilenumformungen oder Zeilenprozesse:

1) Vertauschen 2er Zeilen "$R_i \leftrightarrow R_j$"
2) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen "$R_i + \lambda R_j$"
3) Multi. einer Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ "λR_i"

Entspr. Spaltenumformungen.

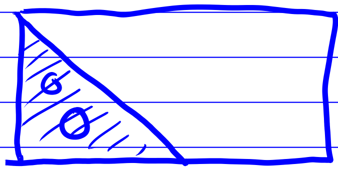
2.42 Satz El. Umf. ändern den Rang nicht.

Bew $\mathrm{Span}(\underbrace{a_{1\square}, a_{2\square}, \dots, a_{m\square}}_{\text{Zeilen}}) \subseteq M(1\times n, \mathbb{K})$

ändert sich bei el. Zeilenumf. nicht.
$\Rightarrow$ Zeilenrang ändert sich nicht.
Ebenso Spaltenumf. $\square$

2.44 Def $A \in M(m\times n, \mathbb{K})$ hat <u>diagonale Zeilenstufenform</u>, falls

$a_{ij} = 0$ für $j<i$



und $a_{ii} \neq 0$ für $i=1..r$

$a_{ij}=0$ für $i>r$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & a_{22} & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr} & & \cdot \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$0 =$ dZSF mit $r=0$

2.44 Satz A in diagZSF hat Rang $= r$

Bew Zeilen $i>r$ tragen zu Span(Zeilen) nichts bei, die ersten r Zeilen lin. unabh., denn

wenn $0=\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \,\text{Zeile}_i =$

$$= \left(\underbrace{\alpha_1 a_{11}}_{0} \;\middle|\; \underbrace{\cancel{\alpha_1 a_{12}} + \alpha_2 \overset{\neq 0}{a_{22}}}_{0} \;\middle|\; \quad \right)$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 0 \quad \ldots$ □

Satz Jede $A \in M(m \times n, K)$ lässt sich durch el. Zeilen- und Spaltenumf. auf dZSF bringen.

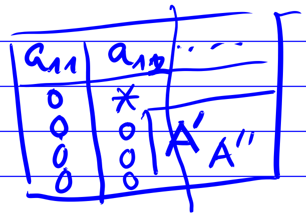
Bew "Gauß-Verfahren"

- Falls $A=0$: fertig. Sei $A \neq 0$.
- Falls $a_{11} = 0$ vertausche Spalten

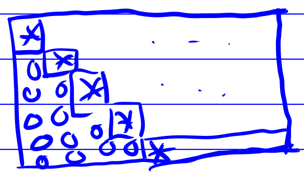
so, dass 1. Spalte $\neq 0$.

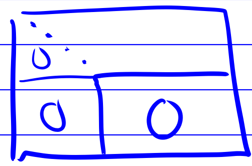
- Falls $a_{11} = 0$: vertausche Zeilen so, dass $a_{11} \neq 0$.

- $R_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}} R_1$ $\forall k = 2 \dots m$



- Fahre fort mit A' bis entweder $A' = 0$ oder $A' = 1$ Zeile, erster Eintrag $\neq 0$.





$\Rightarrow$ dZSF. $\square$