

Verfahren zur Bestimmung der Inversen

Beobachtung $A \in M(n \times n, K)$, $B \in M(n \times p, K)$

$$A \xrightarrow{Z} A' \Rightarrow AB \xrightarrow{Z} A'B$$

Bew Folgt aus

$$A_{kD} B = C_{kD} \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \quad \square$$

↑ Zeile k von AB

2.45 Satz Sei $A \in M(n, K)$.

$$A \xrightarrow{Z} E \Rightarrow E \xrightarrow{Z} A^{-1}.$$

Beweis $A \xrightarrow{Z} E$, $E \xrightarrow{Z} B \in M(n, K)$.

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Bere}} \\ \underbrace{EA}_{A} \xrightarrow{Z} BA = E \end{array} \Rightarrow A \text{ inv. für } B = A^{-1} \quad \square$$

Satz Jede reguläre $A \in M(n, K)$

lässt sich durch cl. Zeilenumf. in E überführen.

Bew "Gauß-Jordan-Verfahren"

- Falls 1. Spalte = 0, dann ist A singular.
($\text{Rg } A < n$)

- 1. Spalte $\neq 0$.
- Falls $a_{11} = 0$, vertausche Zeilen
so, dass $a_{11} \neq 0$.

- $a_{11}^{-1} R_1$

- $\forall k=2 \dots n$

$$0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} 1 & a_{12} & \dots & \\ \hline 0 & \boxed{a_{21}} & & \\ \hline 0 & \boxed{a_{k1}} & & \\ \hline 0 & \boxed{a_{n1}} & & \end{array} A'$$

$$R_k - a_{k1} R_1$$

- Falls 1. Spalte $(A') = 0$, dann A singulär
also 1. Spalte $(A') \neq 0$.

- $a_{22} \neq 0$ (wenn nötig, vertausche
Zeilen)

- $a_{22}^{-1} R_2$

- $\forall k \in \{1 \dots n\} \setminus \{2\}$

$$R_k - a_{k2} R_2$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & a_{13} & \dots \\ \hline 0 & \boxed{1} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \boxed{a_{32}} & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & \end{array} A''$$

etc.



2.47 Bsp $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Finde A^{-1} .

Falls $a \neq 0$.

$$\begin{matrix} A & E \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{a^{-1}R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - cR_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{ad-bc}{a}$

falls $ad-bc=0 \Rightarrow$ singulär
falls $ad-bc \neq 0$

$$\xrightarrow{\frac{a}{ad-bc}R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{fahre fort}} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{b}{a}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{a} + \frac{bc}{a} & -\frac{b}{a} \cdot a \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Falls $a=0$: $c \neq 0$ sonst A singular

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \overset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{c} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$b \neq 0$ sonst

A singular

$$\xrightarrow{\frac{1}{b} R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - \frac{d}{c} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} - \frac{d}{c} \cdot 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$