Lineare Gleichungen

3.1 Def lin. Gl.system aus m Gl.en in n Unbekannten

$$Ax = b$$

$A \in M(m \times n, \mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$
gegeben gesucht geg.

Äq.: $Lu = b$
$L \in \mathcal{L}(V, W)$ geg., $b \in W$ geg., $u \in V$ gesucht

Die Gl. heißt
homogen falls $b = 0$
inhomogen falls $b \neq 0$
lösbar falls $b \in \text{Bild } L$
$\Leftrightarrow \exists u \in V : Lu = b$

eindeutig lösbar falls
$\exists_1 u \in V : Lu = b$
universell lösbar falls
$\forall b \in W \; \exists u \in V : Lu = b$
universell und eindeutig lösbar
$\forall b \in W \; \exists_1 u \in V : Lu = b$

Bsp

- Sei $\mathcal{A} = (a_1 \dots a_n)$ Basis von $\mathbb{K}^n$

  Für $b \in \mathbb{K}^n$ finde

  $(b)_{\mathcal{A}} = x$, also $b = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

  $\iff$ $Ax = b$ mit $A = [a_1 | \dots a_n]$

- Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$. Lin unabh.?

  $\iff$ $Ax = 0$ mit $A = [a_1 | \dots a_n]$

  hat nur die Lsg. $x = 0$.

- Bestimmung von A^{-1}

  $\iff$ löse $Ax = e_k$ $\forall k = 1..n$

  $A \in M(n, \mathbb{K})$ geg., e_k kan.

  $x =$ k-te Spalte von A^{-1}.

- $\mathrm{Span}\{a_1 .. a_m\} \overset{\supseteq}{=} \mathrm{Span}\{b_1 .. b_r\}$?

  $\iff$ $Ax = b_j$ lösbar $\forall j = 1.. = r$

  mit $A = [a_1 \dots a_m]$

  $By = a_i$ mit $B = [b_1 .. b_r]$