$Ax = b \qquad A\ m \times n,\ x \in K^n,\ b \in K^m$

Beobachtung

Wenn $\underbrace{(A|b)}_{\text{erw. Matrix}} \xrightarrow{Z} (A'|b')$

$m \times (n+1) \qquad\qquad m \times (n+1)$

dann $Ax = b \iff A'x = b'$.

(Spezialfall von $AB = C \Rightarrow A'B = C'$)

Def $A \in M(m \times n, K)$ hat **allg. Zeilenstufenform** (general row echelon form), wenn

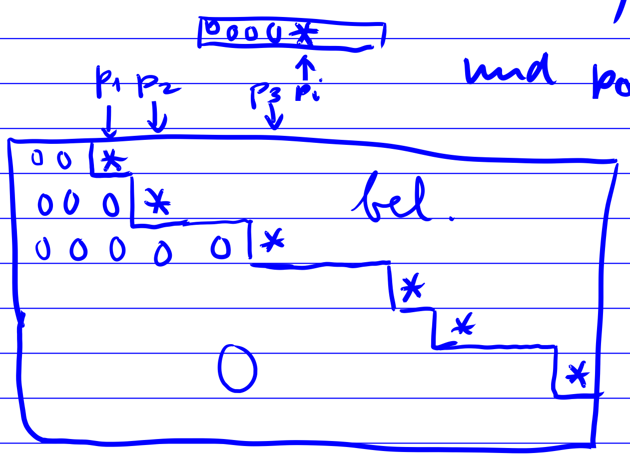
1) alle Nullzeilen am unteren Ende stehen
2) in jeder Zeile i, die $\neq 0$ ist, gilt

$$p_i > p_{i-1}, \text{ wobei}$$

$$p_i = \min\{j = 1..n : a_{ij} \neq 0\}$$

(Stelle des Pivot-Elements)

und $p_0 = 0$



$* =$ Pivot-El.

Bspe
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a3SF $\qquad$ nicht a3SF

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht a3SF

Satz Jede $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ lässt sich durch el. Zeilenumf. auf a3SF bringen.

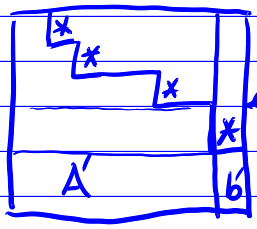
Bew Gauß-Verfahren (Lagrange 1759, Gauss 1810)

- Falls 1. Spalte $= 0$
  $\Rightarrow$ mache mit 2. Spalte weiter
- Falls 1. Spalte $\neq 0$:
  falls $a_{11} = 0 \Rightarrow$ vertausche Zeilen damit $a_{11} \neq 0$
  ↑ Pivot
- $\forall k = 2 \dots m$: $R_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}} R_1$
  $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ "Elimination"
- ab jetzt lasse Spalte 1 unberührt.
  $$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \\ \hline 0 & \\ 0 & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$
  wdh. mit A' bis entweder $A' = 0$ oder keine Zeile übrig.

$\Rightarrow$ a3SF $\qquad$ □

Lösungsverfahren: (i) Bringe $\overset{Ax=b}{(A|b)}$ in ZSF.

(ii)



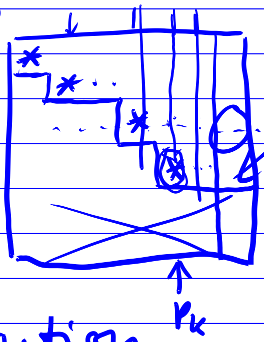
Pivot in letzter Spalte $\Rightarrow$ unlösbar

$A'x = b'$

$0x_1 + \dots + 0x_n = b_k \neq 0$

$0x_1 + \dots + 0x_n = 0$

$a_{kn-1}x_{n-1} + a_{kn}x_n = b_k \neq 0$



nicht $\Rightarrow$ lösbar

Rücksubstitution

- betrachte Zeilen von unten nach oben
- falls $p_k = n \Rightarrow a_{kn}x_n = b_k$

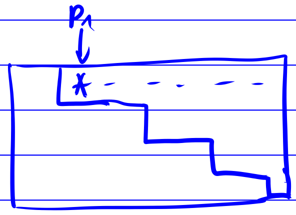
$$\Rightarrow x_n = \frac{b_k}{a_{kn}}$$

- falls $p_k < n \Rightarrow$ Pivot-Variable $\to$

$$x_{p_k} = \frac{b_k - a_{kn}\overset{\text{frei}}{x_n} - \dots - a_{k\,p_k+1}\overset{\text{frei}}{x_{p_k+1}}}{a_{kp_k}}$$

- Zeile darüber:

$$x_{p_i} = \frac{b_i - a_{i,p_i+1}x_{p_i+1} - \dots a_{in}x_n}{a_{ip_i}}$$



$x_{p_1} = \dots$

$x_1 \dots x_{p_1-1}$ frei

Jede Variable, die nicht Pivot-variable ist, ist frei.