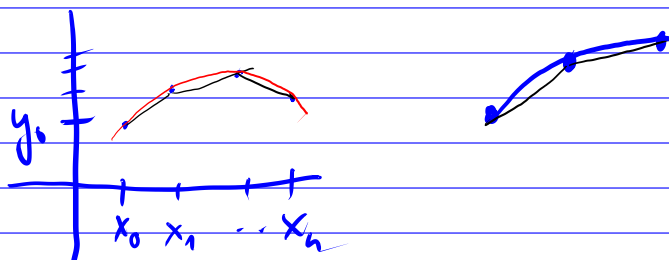


Interpolation durch Polynome



geg. "Stückstellen" $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Werte $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

Gesucht: Poly p vom Grad $\leq n$ mit

$$p(x_j) = y_j \quad \forall j=0 \dots n.$$

$\exists?$ Eind.?

Setze $L: \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \mapsto Lp = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix}$

L ist lin. Abb.

Problem Löse $Lp = y$.

Beachte 1) Identitätssatz: $0 \neq p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{(n)}$

hat $\leq n$ Nullstellen.

$$\Rightarrow \text{Kern } L = \{0\} \Rightarrow L \text{ inj.}$$

$$2) \dim \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{(n)} = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\Rightarrow \text{Bild } L = \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow L \text{ surj.}$$

Also: $Lp = y$ ist universell u. eind. löst.

$$\begin{aligned} \text{Lsg: } p &= L^{-1} y = L^{-1} (y_0 e_1 + y_1 e_2 + \dots + y_n e_{n+1}) \\ &= y_0 L^{-1} e_1 + \dots + y_n L^{-1} e_{n+1}. \end{aligned}$$

$l_k := L^{-1} e_k$ heißen Lagrange-Poly

$$l_k(x_k) = 1, \quad l_k(x_j) = 0, \quad \forall j \neq k$$

$$\Rightarrow l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad \text{Poly. grad.} = n$$

$L l_k = e_k$