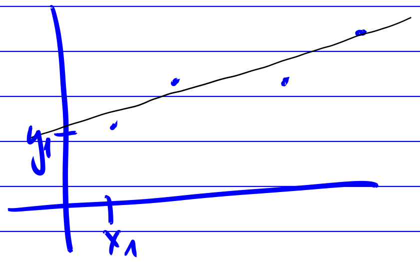
# Methode der kleinsten Quadrate

Gauß 1795, Legendre 1805

## Ausgleichsgerade

$$Y = aX + b$$




Messung:

$(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$

$y_k$ mit Messfehler

gesucht: beste Schätzung für $a, b$.

"Ausgleichsgerade"

Strategie: $\text{Fehler}_k = |a x_k + b - y_k|$

Minimiere $\sum_{k=1}^{m} \text{Fehler}_k^2 = Q(a,b)$

Problem: Finde Minimierer von $f(x,y) \;\hat{=}\; (x_0, y_0)$

Setze $g(x) := f(x, y_0)$

$h(y) := f(x_0, y)$

$\Rightarrow$ $g$ minimal bei $x_0$

$h$ bei $y_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \frac{dg}{dx}(x_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \frac{dh}{dy}(y_0) = 0$$

Entspr. für $n$ Variablen: Ist $f(x_1 \dots x_n)$ minimal bei $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1 \dots X_n) = 0 \quad \forall j = 1 \dots n.$$

Hier: $0 = \frac{\partial Q(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{k=1}^{m} (a x_k + b - y_k)^2$

$$= \sum_{k=1}^{m} 2 (a x_k + b - y_k) x_k \qquad (1)$$

und $0 = \frac{\partial Q(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=1}^{m} 2 (a x_k + b - y_k) \cdot 1$

(2)

$$(2) \iff \left(\sum x_k\right) a + m b - \left(\sum y_k\right) = 0$$

$$\iff \bar{x} a + b = \bar{y}$$

mit $\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k$, $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum y_k$.

$$(1) \iff \left(\sum x_k^2\right) a + \left(\sum x_k\right) b - \sum x_k y_k = 0$$

$$\overline{x^2}\, a + \bar{x}\, b = \overline{xy}$$

mit $\overline{x^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \neq \bar{x}^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{j,k=1}^{m} x_j x_k$

wenn nicht alle $x_k$ gleich.

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_k y_k = \overline{xy} \neq \bar{x}\, \bar{y} = \frac{1}{m^2} \sum_{j,k} x_j y_k$$

im allg.

$$(1) \,\&\, (2) \iff \begin{cases} a_0 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ b_0 = \bar{y} - a_0 \bar{x} \end{cases}$$

(tats. Nenner $\neq 0$ wenn nicht alle $x_k$ gleich)

Später: $(a_0, b_0)$ ist tats. Minimierer.