Kap. 4: Determinante

Bsp Wissen: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ inv.bar

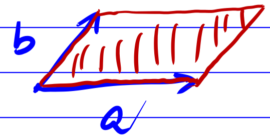
$$\Longleftrightarrow \underbrace{ad - bc}_{\det(A) = |A|} \neq 0$$

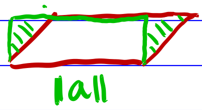
Hintergrund: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ inv.bar

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Rg} A = 2$

$\Longleftrightarrow$ $\{a, b\}$ lin. unabh. in $\mathbb{R}^2$

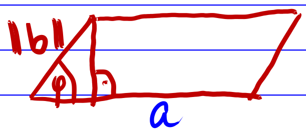
$\Longleftrightarrow$ $0 \neq \text{Fläche}(\underbrace{\text{Parallelogramm}(a,b)}_{\{\alpha a + \beta b \,:\, \alpha, \beta \in [0,1]\}})$





I Höhe $= h$

$F = \|a\| \cdot h$



$h = \|b\| \, |\sin \varphi|$

orientierte Fläche $F = \|a\| \cdot \|b\| \sin \varphi$

$$= \|a\| \, \|b\| \cos\left(\varphi - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$= a \cdot \Big(\underbrace{R_{-\frac{\pi}{2}}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} b\Big)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}.$$

$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

"Determinantenform"

$\det((a),b) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Eigenschaften:

(a) linear in jedem Argument.

(b) antisymmetrisch = alternierend

$\det(b,a) = -\det(a,b)$

$b_1 a_2 - b_2 a_1$

(c) $\det(e_1, e_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

"normiert".

<u>Bsp</u> 3×3 Determinanten

$M(3\times 3, \mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ a_2 & b & c \\ a_3 & & \end{bmatrix}$ inv. bar

$\iff$ Volumen $(\text{Parallelepiped}(a,b,c)) \neq 0$

$\{\alpha a + \beta b + \gamma c :$

$\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]\}$

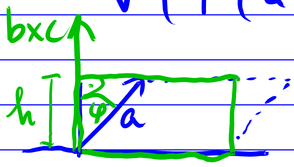
$b \times c = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$ Kreuz-produkt.

Eigenschaften: $b \times c \perp \text{Span}(b,c)$

$\|b \times c\| = \text{Fläche}(\text{Parallelogramm}(b,c))$

• $V(P(a,b,c))$

$V(P(a,b,c))$



Span(b,c)

$$V = V = h \cdot \underbrace{G}_{\|b\times c\|}$$

$$= \|a\| \cos\varphi \, \|b \times c\|$$

orientierte Vol.

$$V = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a \cdot (b \times c)$$

zyklisch vertauscht

$$= \det(A) = \det(a,b,c)$$

Eigenschaften:

a) linear in jedem Argument.

b) Vorzeichen ändert sich beim Vertauschen 2er Argumente:

$$\det(a,b,c) = -\det(a,c,b)$$
$$= \det(c,a,b)$$

c) $\det(e_1,e_2,e_3) = 1$

$\Rightarrow$ det ist altern., normierte Multilinearform