4.1 Def $F: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{m \text{ Faktoren}} \to \mathbb{K}$ heißt

a) Multilinearform vom Grad m („m-Form") auf $\mathbb{K}^n$, wenn linear in jedem Arg:

$$F(\ldots, x_j + y_j, \ldots) = F(\ldots, x_j, \ldots) + F(\ldots, y_j, \ldots)$$

und $F(\ldots, \alpha x_j, \ldots) = \alpha F(\ldots, x_j, \ldots)$

b) alternierende m-Form, wenn außerdem

$$F(\ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots) = -F(\ldots, \underset{\uparrow\, j\text{-te Stelle}}{x_k}, \ldots, \underset{\leftarrow k\text{-te Stelle}}{x_j}, \ldots) \quad \forall j \neq k$$

c) Determinantenform, wenn außerdem $m = n$ und

$$F(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

4.2 Satz Sei F alt. m-Form.

Sind $a_1 \ldots a_m \in \mathbb{K}^n$ lin. abh., dann $F(a_1, \ldots, a_m) = 0$.

Insbes. wenn $a_i = a_j$ für $i \neq j$ dann $F(a_1, \ldots, a_m) = 0$.

Beweis Falls 2 Arg. gleich,

$$F(\dots, a, \dots, a, \dots)$$

$$= -F(\dots, a, \dots, a, \dots)$$

$$\Rightarrow \quad F(\dots, a, \dots, a, \dots) = 0$$

$1+1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$

Falls $a_1 \dots a_m$ lin. abh., etwa $a_1 = \sum_{k=2}^{m} \beta_k a_k$, dann

$$F(a_1, \dots, a_m) = F\left(\sum_{k=2}^{m} \beta_k a_k, a_2, \dots, a_m\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{m} \beta_k \underbrace{F(a_k, a_2, \dots a_k \dots a_m)}_{0} = 0$$

$\square$

Folgerung Wenn F alt. m-Form auf $\mathbb{K}^n$ und $m > n$, dann $F = 0$.

4.3 Satz Sei F eine m-Form auf $\mathbb{K}^n$ mit der Eigenschaft:

Immer wenn $a_k = a_{k+1}$ für $k < n$, dann $F(a_1, \dots, a_m) = 0$.

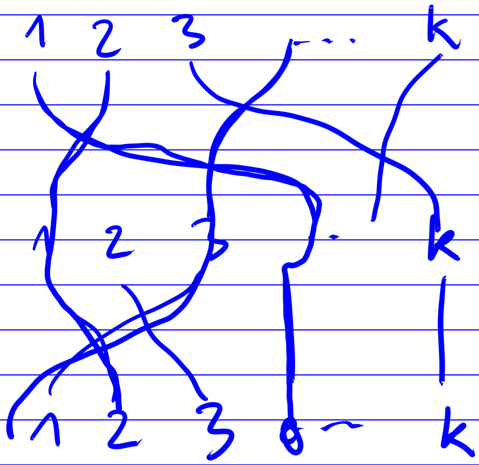
Dann ist F alternierend.

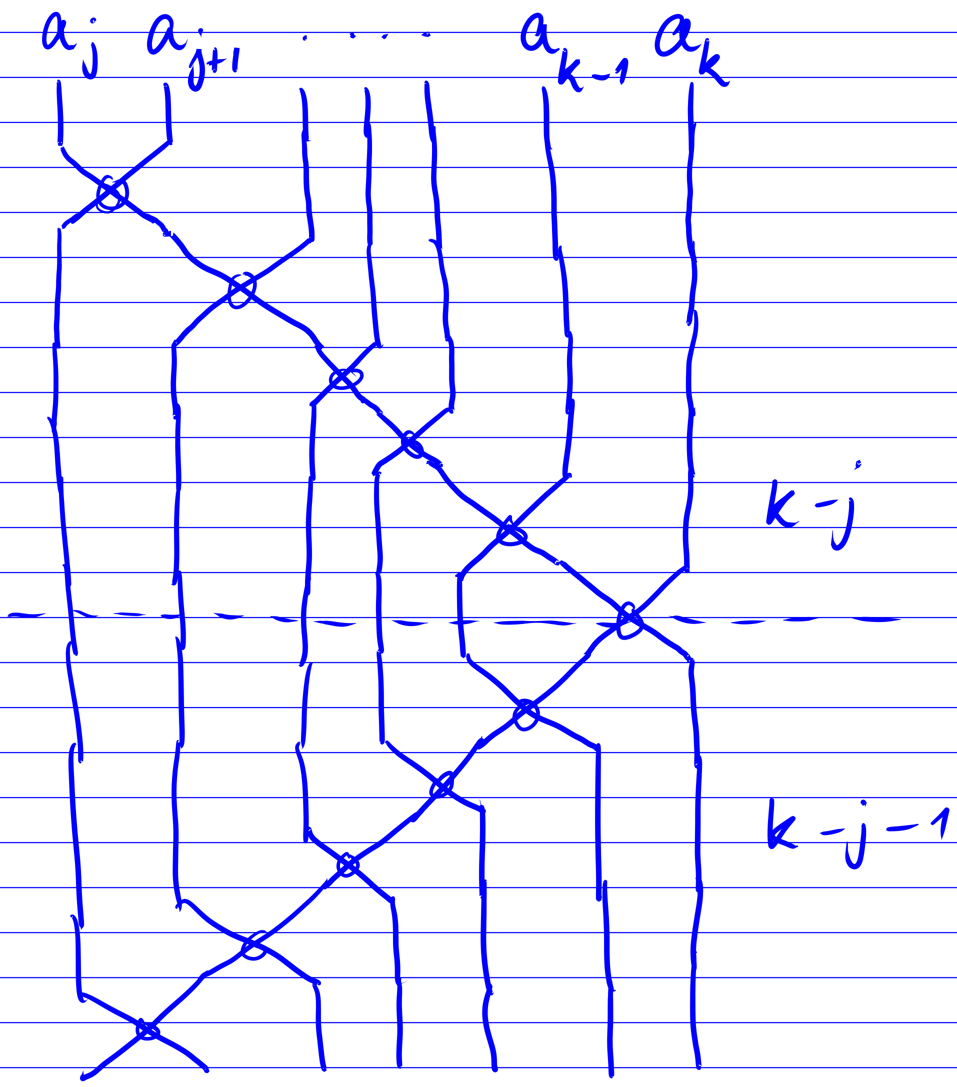
Beweis $0 = F(\dots, a+b, a+b, \dots)$ (Positionen k, $k+1$)

$$= \underbrace{\cancel{F(\dots, a, a, \dots)}}_{=0} + F(\dots, a, b, \dots)$$

$$+ F(\dots, b, a, \dots) + \underbrace{\cancel{F(\dots, b, b, \dots)}}_{=0}$$

d.h. $F(\dots, b, a, \dots) = -F(\dots a, b \dots)$





$\Sigma\ 2(k-j)-1$ unger.

$$F(\ldots a_j \ldots a_k \ldots)$$

$$= -F(\ldots a_k \ldots a_j \ldots) \quad \square$$