4.4 Satz a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists_1$ Determinanten-form $\overset{\det}{}$ auf K^n.

b) **Def** Für $A \in M(n, K)$ heißt

$$\det(A) = |A| := \det(a_{\square 1}, a_{\square 2}, \dots, a_{\square n})$$

$\uparrow$ 1. te Spalte

die **Determinante** von A.

c) Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in M(n, K)$ entstehe $A_{jk} \in M(n-1, K)$ durch Streichen der j-ten Zeile und der k-ten Spalte.

$\forall i, k \in \{1 \dots n\}$:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

"Entwicklung nach der i-ten Zeile"

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} |A_{jk}|$$

"Entwicklung nach der k-ten Spalte"

4.5 Bsp für c) $(-1)^{j+k}$, $j =$ Nr. Zeile, $k =$ Nr. Spalte

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Entwicklung nach Spalte 1:

A_{21}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11} \, a_{22} - a_{21} \, a_{12} \, .$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23} + \dots$$

$$= a_{\square 1} \cdot \left(a_{\square 2} \times a_{\square 3} \right)$$

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12} \, .$$

Schritte zum Beweis von 4.4

Sei $\Lambda^m := \{$ alt. m-Formen auf $K^n\}$

Λ^m ist ein K-VR.

4.6 Satz Stimmen $F, G \in \Lambda^n$ auf der kanon. Basis überein, dann $F = G$.

Daher: $\dim \Lambda^n \leq 1$, und es gibt höchstens eine det-Form auf K^n.

Beweis Wir zeigen:

$\forall H \in \Lambda^n$: Wenn $\underline{H(e_1 \dots e_n) = 0}$, dann $H = 0$.

($\Rightarrow$ Wenn $F(e_1 \dots e_n) = G(e_1 \dots e_n)$, dann

$H := F - G$, $H(e_1 \dots e_n) = 0 \Rightarrow H = 0$

$\Rightarrow F = G$.)

Sei $H(e_1 \dots e_n) = 0$.

$\Rightarrow \forall \pi \in S_n$: $H(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) = 0$.

$\Rightarrow \forall a_1 \dots a_n \in K^n$

$$H(a_1 \dots a_n) = H\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} e_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \underbrace{H(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})}_{=0}$$

falls $j_i = j_k$ für $i \neq k$

falls $j_i \neq j_k$ wann immer $i \neq k$

d.h. alle $j_1 .. j_n$ paarweise verschieden

d.h. $j : \{1 ... n\} \to \{1 .. n\}$ ist inj.

$j(1) := j_1$ $\Downarrow$ surj.

d.h. j ist Permutation

$\Rightarrow H(e_{j_1} .. e_{j_n}) = 0$.

$\Rightarrow H(a_1 .. a_n) = 0$. $\square$

Beweis Satz 4.4: a) $\exists$ Det.-form auf $\mathbb{K}^n$

Induktion nach n:

Anker $n = 1$: $\det_{1 \times 1}(A) = \det(a_{11}) =: a_{11}$

Schritt $n-1 \to n$: Sei F_{n-1} Det.form auf $\mathbb{K}^{n-1}$ und $i \in \{1 ... n\}$ fest.

Def. F_n durch Entw. nach Zeile i,

d.h. $$F_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij} \; F_{n-1}(A_{ij})}$$

Zu zeigen: F_n ist Det.form.