falls $j_i \neq j_k$ wann immer $i \neq k$

d.h. alle $j_1 .. j_n$ paarweise verschieden

d.h. $j : \{1 ... n\} \to \{1 .. n\}$ ist inj.

$j(1) := j_1$ $\Downarrow$ surj.

d.h. j ist Permutation

$\Rightarrow H(e_{j_1} .. e_{j_n}) = 0$.

$\Rightarrow H(a_1 .. a_n) = 0$. $\square$

Beweis Satz 4.4 : a) $\exists$ Det.-form auf $\mathbb{K}^n$

Induktion nach n:

Anker $n=1$: $\det\limits_{1\times 1}(A) = \det(a_{11}) =: a_{11}$

Schritt $n-1 \to n$: Sei F_{n-1} Det.form auf $\mathbb{K}^{n-1}$ und $i \in \{1 ... n\}$ fest.

Def. F_n durch Entw. nach Zeile i,

d.h. $$F_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij} \, F_{n-1}(A_{ij})}$$

Zu zeigen: F_n ist Det.form.

a) multilinear: linear in Spalte j

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \mapsto a_{ij} \text{ ist linear.}$$

linear in Spalte $k \neq j$: weil $F_{n-1}(A_{ij})$ multilinear (Induktions-Ann.)

b) alternierend: $\Leftarrow$ Satz 4.3

zu zeigen: wenn $a_{\square k} = a_{\square k+1}$

dann $\underline{F_n(a_{\square 1} \ldots a_{\square n}) = 0}$.

$$F_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij})$$

$$= (-1)^{i+k} a_{ik} F_{n-1}(A_{ik}) +$$

$$(-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} F_{n-1}(A_{i,k+1})$$

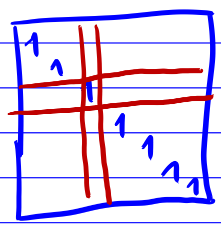
$$= 0.$$

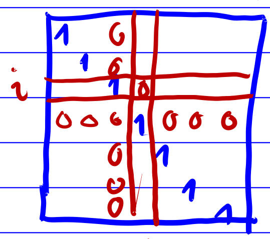
c) normiert: $F_n(e_1 \ldots e_n)$

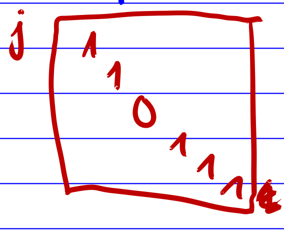
$A = E_n$, dann $A_{ij} = \begin{cases} E_{n-1} & \text{falls } i=j \\ & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

hat 0-Spalte

$\Rightarrow F_{n-1}(A_{ij}) = 0$





$=$ 

$$F_n(\underbrace{e_1 \ldots e_n}_{E_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{\shortparallel \\ 1 \text{ für } i=j \\ 0 \text{ für } i \neq j}} F_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \underbrace{(-1)^{i+i}}_{1} \underbrace{\delta_{ii}}_{1} \underbrace{F_{n-1}(E_{n-1})}_{1} = 1 .$$

$\square$