4.7 Satz $|A^T| = |A|$

$n \times n$

Beweis $n=1$: $|A^T| = a_{11} = |A|$

$n=2$: $|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A|$

$n \geq 3$:

Zeigen: $D(A) := |A^T|$ ist Det. form.

$(\Rightarrow |A^T| = D(A) = |A|$ wg. Satz 4.6$)$.

a) linear in der i-ten Spalten: $a_{\Box i}$

Entwickle $|A^T|$ nach der i-ten Zeile:

$$|A^T| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \underbrace{(A^T)_{ij}}_{a_{ji}} \cdot \det\left((A^T)_{ij}\right)$$

$(A^T)_{ij} = (A_{ji})^T$

b) alternierend:

Sei $a_{\Box k} = a_{\Box k+1}$. Wähle $k \neq i \neq k+1$

Entwickle $|A^T|$ nach Zeile i

$$|A^T| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \underbrace{\det\left((A^T)_{ij}\right)}_{\text{hat 2 gl. Zeilen}}$$

$=0$

Wenn $B = \overset{(n-1)\times(n-1)}{(A^T)_{ij}}$ 2 gl. Zeilen hat,

dann $\text{Zeilenrang}(B) < n-1$

$\text{Zeilenrang}(B) = \text{Spaltenrang}(B)$

$\Rightarrow$ Spalten von B lin. abh.

$\overset{\text{Satz 4.2}}{\Longrightarrow}$ $\det(B) = 0$.

Also $\overset{D(A)=}{|A^T|} = 0$.

c) normiert $D(E_n) = |E^T|$

$= |E| = 1$. $\square$