Determinanten-Multiplikationssatz

4.9 Satz $\forall A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$|AB| = |A|\,|B| .$$

Beweis: $b_{\square i}$ = Spalten von B

$\Rightarrow$ $Ab_{\square i}$ = Spalten von AB

Sei $F(b_{\square 1}, \dots, b_{\square n}) := \cancel{\det(AB}$

$$:= \det(Ab_{\square 1}, \dots, Ab_{\square n}) = |AB| .$$

a) F ist multilinear

b) F ist alternierend.

$$-F(b_1, b_2, b_3 \dots) = -\det(Ab_1, Ab_2, Ab_3 \dots)$$

$$\|$$

$$F(b_2, b_1, b_3 \dots) = \det(Ab_2, Ab_1, Ab_3 \dots)$$

c) $F(e_1 \dots e_n) = \det(a_{\square 1}, \dots, a_{\square n})$

$$= |A| .$$

falls $|A| \neq 0$:

$\frac{1}{|A|} F$ ist Det.form $\Rightarrow \frac{1}{|A|} F(B) = |B|$

$\Rightarrow |AB| = |A|\,|B|$

falls $|A| = 0$: $F = 0 \Rightarrow |AB| = 0$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

4.9 Korollar $A \in M(n, \mathbb{K})$ inv.bar $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$.

In dem Fall ist $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Bew A inv.bar $\Rightarrow E = A A^{-1}$

$\Rightarrow 1 = |E| = |A A^{-1}| = |A| \, |A^{-1}|$

also $|A| \neq 0$ und $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

A nicht inv.bar $\Rightarrow \mathrm{Rg}\, A < n$

$\Rightarrow$ Spalten lin. abh. $\Rightarrow \det(A) = 0$.

$\square$

Bem $P \Longleftrightarrow Q$

1) $P \Rightarrow Q$

2) nicht-$P \Rightarrow$ nicht-Q.

4.11 Korollar Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $\dim V = n < \infty$, $L \in \mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

$\det(M_{\mathcal{B}}(L))$ hängt nicht von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab, sie wird mit $\det(L)$ bez.

Bew $M_{\mathcal{A}}(L) = S^{-1} M_{\mathcal{B}}(L) S$

$$\det\left(M_{\mathcal{A}}(L)\right) = \det\left(S^{-1} M_{\mathcal{B}}(L) S\right)$$

$$= \det(S^{-1}) \det\left(M_{\mathcal{B}}(L) S\right)$$

$$= \det(S^{-1}) \det(M_{\mathcal{B}}(L)) \det(S)$$

$$= \frac{1}{\cancel{|S|}} |M_{\mathcal{B}}(L)| \cancel{|S|} = |M_{\mathcal{B}}(L)|.$$

"ähnliche Matrizen haben gl. det." $\square$

Leibniz-Formel

Polynome in mehreren Variablen

Bsp $p(x,y) = a + bx + cy$
$+ dx^2 + ey^2 + fxy$
$+ gx^3 + hy^3 + ix^2y + jxy^2.$

hat grad 3. $k_1 \ldots k_n \in \mathbb{N}_0$

$\operatorname{grad}(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}) = k_1 + \ldots + k_n$

homogen $\Leftrightarrow$ alle Terme haben gl. Grad.

Det (A) als Fkt von $a_{11} \ldots a_{nn}$
ist Poly vom grad n in n^2 Variablen.

Bsp $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21}$$
$$- a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

Allg $n!$ Terme

Poly homogen von Grad n

Jeder Term ist Produkt von versch. a_{ij}

~~d.h.~~ (einer aus jeder Zeile, einer aus jeder Spalte)

d.h. $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$

$\pi \in S_n$

Koeffizienten ± 1, tats. $\operatorname{sign}(\pi)$

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Leibniz-Formel