

4.12 Cramer'sche Regel

Sei $A \in M(n, \mathbb{K})$ inv. bar und $b \in \mathbb{K}^n$

Die eind. Lsg. von $(Ax = b)$ ist

$$(x_i) = \frac{1}{|A|} \det \left(\underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{a_1}, \dots, a_{i-1}, b, \overset{\substack{\uparrow \\ a_{i+1}}}{a_{i+1}}, \dots, a_n \right).$$

Bew $Ax = b \Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$

$$\Leftrightarrow x_1 a_1 + \dots + x_{i-1} a_{i-1} + 1(x_i a_i - b)$$

$$+ x_{i+1} a_{i+1} + \dots + x_n a_n = 0$$

Also sind die Spalten der Matrix

$$M := \left(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i a_i - b, a_{i+1}, \dots, a_n \right)$$

lin. abh. $\Rightarrow \det M = 0$

Linear in Spalte $i \Rightarrow$

$$0 = \det M = x_i \det(A) - \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow +x_i \det(A) = +\det$$

A inv. bar

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{\det(A)} \det \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \checkmark \end{array} \right) \square$$

Bem: Rechenaufwand

$$\text{ZSF: } \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

$$\det: O(n^3)$$

$$\text{Cramer: } n \det \Rightarrow O(n^4)$$

$$\uparrow \text{Gauß: } O(n^3)$$

ineffizient

Korollar Sei $C = A^{-1}$. Dann

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|} |A_{ij}|.$$

Bew c_{ij} ist Lsg von $Ax = e_j$

$$AC = E \Rightarrow Ac_{ij} = e_j$$

$$\text{Cramer} \Rightarrow c_{ij} = \frac{1}{|A|} \det(a_1, \dots, \underset{i}{\overset{j}{e_j}}, \dots, a_n)$$

Entw. nach Spalte i :

$$c_{ij} = \frac{1}{|A|} (-1)^{i+j} |A_{ij}|. \quad \square$$

Bem Rechenaufwand: ineffizient

& zur Ber. von A^{-1} .

$$\begin{aligned} \text{(braucht: } n^3 O(n^3) + n^2 \cdot O(\underbrace{(n-1)^3}_{n^3 + O(n^2)}) \\ = O(n^5) \end{aligned}$$

$$\text{Vgl. Gauß-Jordan: } \frac{3}{2}n^3 + O(n^2)$$

Anwendung Wenn $a_{ij} \in \mathbb{Z}$,

dann $c_{ij} \in \frac{1}{|A|} \mathbb{Z}$.