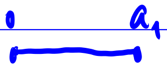
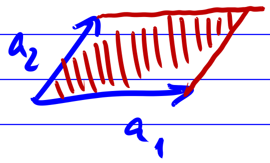
Volumen im $\mathbb{R}^n$

Das von $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Parallelotop ist

$$P(a_1 \dots a_n) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j \; : \; 0 \le \beta_j \le 1 \;\; \forall j \in \{1 \dots n\} \right\}$$

$n = 1$: 

Strecke

$n = 2$: 

Parallelogramm

$n = 3$: Parallelepiped = Spat

$P(e_1 \dots e_n)$ = Einheitswürfel

Fläche $(P(a_1, a_2)) = |\det(a_1, a_2)|$

Volumen $(P(a_1, a_2, a_3)) = |\det(a_1, a_2, a_3)|$

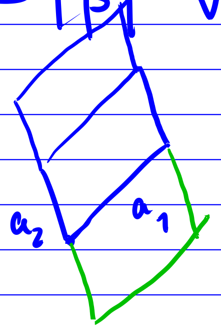
Def n-dim Volumen

$\mathrm{Vol}\, P(a_1 \dots a_n) =: V(a_1 \dots a_n)$

muss folgende Eigenschaften erfüllen:

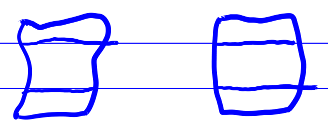
a) Homogenität in jeder Richtung:

$$V(a_1 \dots a_{i-1}, \beta a_i, a_{i+1} \dots a_n)$$
$$= |\beta| \, V(a_1 \dots a_n) \qquad \forall i \in \{1 .. n\} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$



b) ~~Cavi~~ Cavalierisches Prinzip (1647)

$$V(\dots a_{i-1}, a_i + \beta a_k, a_{i+1} \dots)$$
$$= V(a_1 \dots a_n).$$



c) Einheitswürfel $V(e_1 \dots e_n) = 1$.

<u>4.14 Satz</u> $\exists_1$ Fkt $V : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Faktoren}} \to \mathbb{R}$
mit a), b), c),
nämlich

$$V(a_1 \dots a_n) = |\det(a_1 \dots a_n)|.$$

$\underbrace{F(y \dots) = 0}$ sollte heißen $\underbrace{F(y \dots)}_{=0}$.