Kap. 5: Eigenwerte

5.1 Def. Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $L \in \mathcal{L}(V)$.
$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert von L,
wenn $\exists v \in V \setminus \{0\}$:

$$Lv = \lambda v.$$

v heißt Eigenvektor von L.

Bem • $\forall$ EV $\exists_1$ EW.

• Ein EW kann mehrere EVen haben:

$$2v: \quad L(2v) = 2Lv$$
$$= 2\lambda v = \lambda(2v).$$

5.2 Lemma Sei $\mathcal{B} = (v_1 \ldots v_n)$ geo. Basis von V, $A = M_{\mathcal{B}}(L)$ hat genau dann Diagonalgestalt,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wenn jedes v_j EV von L ist (zum EW λ_j)

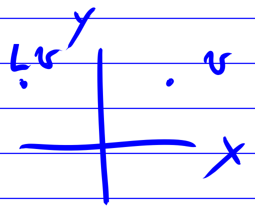
Bew $Lv_j = \lambda_j v_j \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}(L) e_j = \lambda_j e_j$

$\Leftrightarrow$ die j-te Spalte von A ist $\lambda_j e_j$. $\square$

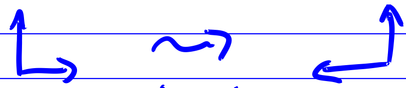
5.3 Def $L \in \mathcal{L}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine Basis aus Eigenvektoren existiert.

5.4 Bsp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$

a) L = Spiegelung an der y-Achse



$$Le_1 = -e_1, \quad Le_2 = e_2$$

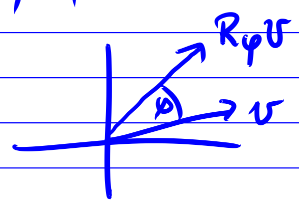


$$M_{\mathcal{K}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e_1 und e_2 sind EVen mit EWen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$.

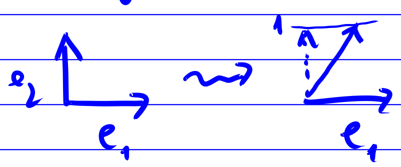
b) $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$

hat keinen EV in $\mathbb{R}^2$ und keinen EW in $\mathbb{R}$.



und ist nicht diag.bar.

c) Scherung:



$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0$$

offenbar $Ae_1 = e_1$ EV mit EW $\lambda_1 = 1$.

Sonst?

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1x+5y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \text{entweder } \lambda = 1: & y=0 \quad (\text{Vielfaches von } e_1) \\ \text{oder } \lambda \neq 1: & y=0,\ x=0 \quad (\text{kein EV}) \end{cases}$$

Also nicht diag.bar.

5.5 Bem Sei $v \in V \setminus \{0\}$.

v EV zum EW $\lambda \iff v \in \mathrm{Kern}(L - \lambda \mathbb{1}_V)$

Denn $v \in \mathrm{Kern}(L - \lambda\mathbb{1}) \iff (L-\lambda\mathbb{1})v = 0$

$\iff Lv = \lambda v \iff v$ EV mit EW λ.

Also λ EW $\iff \mathrm{Kern}(L-\lambda\mathbb{1}_V) \neq \{0\}$.