

Eigenraum

5.6 Def Sei λ EW von $L \in \mathcal{L}(V)$.

Dann heißt der Unterraum

$$E_\lambda := \text{Kern}(L - \lambda \mathbb{1}_V)$$

$$= \{0\} \cup \{ \text{Eveu zum EW } \lambda \}$$

der Eigenraum von L zum EW λ ,

und

$$g(\lambda) := \dim E_\lambda$$

die geometrische Vielfachheit von λ .

Bsp $A = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}, A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & & \\ & 3-\lambda & \\ & & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$\text{Kern}(A - \lambda I) \neq \{0\}$ für $\lambda = 3$ oder 5

(nicht sonst weil $\text{Rg}(A - \lambda I) = 3$)

$$E_3 = \text{span}(e_1, e_2), \quad E_5 = \text{span}(e_3)$$

Allg.

$$\{ \text{EW}(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) \} = \{d_1, \dots, d_n\}$$

A: 3 ist ein

"doppelter EW"

$$g(3) = 2$$

5 ist ein "einfacher EW" $g(5) = 1$.

$$\begin{pmatrix} d_1 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & d_n - \lambda \end{pmatrix}$$

5.8 Lemma Seien $v_1 \dots v_\ell$ EVen
mit EWen $\lambda_1 \dots \lambda_\ell$, $\lambda_i \neq \lambda_j$
für $i \neq j$.

Dann sind $v_1 \dots v_\ell$ lin. unabh.

Bew durch Induktion nach ℓ :

Anhet $\ell=1$: v_1 lin. unabh.
weil $v_1 \neq 0$.

Schritt $\ell \Rightarrow \ell+1$: Seien $v_1 \dots v_{\ell+1}$ EVen
zu EWen $\lambda_1 \dots \lambda_{\ell+1}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Ans

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0 \in V$$

folgt (wende L bzw. $\lambda_{\ell+1} 1_v$ an)

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_{\ell+1} v_1 + \dots + \alpha_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} v_{\ell+1} = 0$$

$$\text{Diff. } \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{\ell+1}) v_1 + \dots + \alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1}) v_\ell = 0$$

Ind. ann.: $v_1 \dots v_\ell$ lin. unabh. $\Rightarrow$

$$\underbrace{\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{\ell+1})}_{\neq 0} = 0, \dots, \underbrace{\alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1})}_{\neq 0} = 0$$

$$\text{also } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0 \dots \alpha_\ell = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{i+1} v_{i+1} = 0$$

$$v_{i+1} \text{ EV} \Rightarrow v_{i+1} \neq 0$$

$\Rightarrow \alpha_{i+1} = 0$ also $v_1 \dots v_{i+1}$ lin.
unabh. $\square$

5.9 Bem • Falls $\dim V = n < \infty$,
kann L höchstens n EWe
haben.

• Falls $\exists_n$ EWe, wähle EVen:
bilden $\&$ Basis, die L diagonalisiert.

• $\exists$ Matrizen diag. far, aber $< n$ EWe
z.B. E oder O

Diagonalisierung von $A \in M(n, K)$

Sei $B = (v_1 \dots v_n)$ eine Basis aus EVen.

$$A v_j = \lambda_j v_j$$

$$\Rightarrow M_B(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D$$

$$\Rightarrow S^{-1} A S = D \text{ und } A = S D S^{-1}$$

$$S = (v_1 \dots v_n)$$

Spalten(S) = EVen von A

$$e_j \xrightarrow{S} v_j \xrightarrow{A} \lambda_j v_j \xrightarrow{S^{-1}} \lambda_j e_j.$$

5.10 Korollar Sei $\dim V = n < \infty$

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_\ell$ die versch. EWe
von L

$$n_i := g(\lambda_i), \quad v_1^{(i)} \dots v_{n_i}^{(i)}$$

Dann sind

$$v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(\ell)} \dots v_{n_\ell}^{(\ell)}$$

lin. unabh. Insbes. ist $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \leq n$

und L diag. bar $\Leftrightarrow \sum n_i = n$.

Bew Ist $\sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} v_k^{(i)} \right) = 0,$

setze $w_i := \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} v_k^{(i)} \in E_{\lambda_i}$

$\Rightarrow$ alle $w_i = 0$

$v_1^{(i)} \dots v_{n_i}^{(i)}$ lin. un.

$\Rightarrow \alpha_k^{(i)} = 0 \quad \forall k \quad \forall i$

also $v_1^{(1)} \dots v_{n_\ell}^{(\ell)}$ lin. un.

Falls $\sum n_i = n \Rightarrow v_1^{(1)} \dots v_{n_\ell}^{(\ell)}$ ist Basis von V

$\Rightarrow \exists$ Basis aus EVen

$\Rightarrow L$ diag. bar.

Falls L diag. bar, wähle Basis $u_1 \dots u_n$

aus EVen. Darunter seien m_i EVen

zum EW λ_i . Dann ist $m_i \leq n_i$.

also

$$n = \sum_{i=1}^l m_i \leq \sum_{i=1}^l n_i \leq n$$

also $m_i = n_i$ und $\sum n_i = n$. $\square$