

Das charakteristische Polynom

5.11 Lemma Sei $\dim V = n < \infty$
 $\lambda \in K$

$$\lambda \text{ ist EW} \Leftrightarrow \det(L - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Bew $\lambda \text{ ist EW} \Leftrightarrow \text{Kern}(L - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}$
 $\Leftrightarrow L - \lambda \mathbb{1}$ nicht inj
 $\Leftrightarrow \det(L - \lambda \mathbb{1}) = 0. \quad \square$

Def Sei $\dim V = n < \infty, L \in \mathcal{L}(V)$.

Das char. Poly P von $L \in \mathcal{L}(V)$ oder
von $A \in M(n, K)$ ist

$$P_L(\lambda) = \det(L - \lambda \mathbb{1})$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

5.13 Korollar Die EWs von L sind
genau die Nullstellen des char. Poly.

5.12 Lemma

$P_L(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$
ist ein Poly von Grad n mit $c_n = (-1)^n$
 $c_{n-1} = -\text{tr}(L), c_0 = \det(L)$

Beweis Sei $A = M_B(L)$, $P_L(\lambda) = P_A(\lambda)$
 $= \det(A - \lambda E)$

Zunächst: $n=2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{c_1 = \text{Spur } A} \lambda + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{c_0 = \det A}$$

$\uparrow$
 $c_2 = 1$

Allg. n : $P(0) = \det(A - 0E)$
 $= \det(A)$.

Leibniz-Formel $\Rightarrow \det$ ist Poly_n

$$\text{Poly}_n(\text{Poly}_d(\lambda)) = \text{Poly}_{\leq nd}(\lambda)$$

$\uparrow$
mehrere Variablen

$$(\leq \text{weil } x^2 - y^2 \mid_{y=\lambda=x} = 0)$$

Also: $P_L(\lambda)$ ist Poly vom Grad $\leq n$

Tats. ist Grad $= n$, und $c_n = (-1)^n$

denn in Leibniz $\det B = \sum \pm b_{1\pi(1)} \cdots b_{n\pi(n)}$

$$B = A - \lambda E$$

enthält nur ein Term ($\pi = \text{id}$) n λ 's,

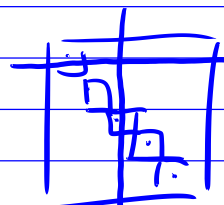
Zu zeigen $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Spur } A$

Induktion nach n , Entwicklung nach 1. Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (a_{1j} - \lambda \delta_{1j}) \det(A - \lambda E)_{1j} \\ &= (a_{11} - \lambda) \det(A - \lambda E)_{11} + R(\lambda) \end{aligned}$$

Beh $\text{grad } R(\lambda) \leq n-2$

denn in $(A - \lambda E)_{1j}$



kommen nur $n-2$ λ 's vor.

□

Also Ind. ann.:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E)_{11} &= (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} \\ &+ (-1)^{n-2} \sum_{j=2}^n a_{jj} \lambda^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E) = (a_{11} - \lambda) \left((-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-2} \sum_{j=2}^n a_{jj} \lambda^{n-2} + \dots \right)$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sum_{j=2}^n a_{jj} \lambda^{n-1} + (-1)^{n-1} a_{11} \lambda^{n-1}$$

5.14 Bsp a) Spiegelung an der y-Achse

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(1-\lambda) - 0 = \underline{\underline{(\lambda+1)(\lambda-1)}}$$

$$= \underline{\underline{\lambda^2 - 1}}$$

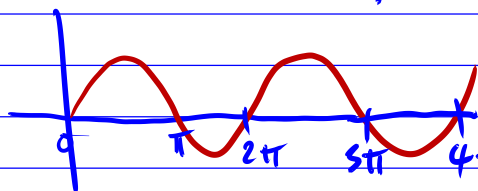
$$\Rightarrow \text{NSTen} = \text{EWe} \text{ : } \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$b) R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$P_{R_\varphi}(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi \geq 0$$

und > 0 für $\varphi \notin \pi \mathbb{Z}$



P hat keine NST
 R_φ hat keinen EW.

• Für $\varphi = 0$ ist $R_\varphi = E$,

$$P_E(\lambda) = (1-\lambda)^2, \quad \lambda = 1 \text{ doppelte NST}$$

∴ $\lambda = 1$

c) Scherung $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & s \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \underline{(1-\lambda)^2}^{(2)}$$

$\lambda=1$ ist doppelte NST, "algebraische
 aber $E_1 = \text{Span}\{e_1\}$ Vielfachheit"
 also $\underline{g(1)=1} < a(1)=2$