5.16 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Poly $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots$

$\dots + c_1 z + c_0$

mit $c_n, c_{n-1}, \dots c_0 \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$

ist von der Form

$$P(z) = c_n \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{m_i}$$

mit $m_i \in \mathbb{N}$ und $\underline{\sum_{i=1}^{r} m_i = n}$, $z_i \in \mathbb{C}$.

Die z_i sind die Nullstellen von P, eind. bis auf Reihenfolge; ~~dass~~ das m_i ist eind für jedes z_i.

5.15 Korollar Jedes Poly hat eine NST in $\mathbb{C}$, jede $A \in M(n, \mathbb{C})$ einen EW.

5.18 Def Falls $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ k-fache NST von $P_L(\lambda)$, d.h.

$$P_L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \, Q(\lambda)$$

mit Q Poly mit $Q(\lambda_0) \neq 0$

so heißt k die <u>alg. Vielfachheit</u> von λ_0, $a(\lambda_0)$.

5.19 Lemma $g(\lambda) \le a(\lambda)$

Bew $g(\lambda_i) =: n_i = \dim E_{\lambda_i}$

wähle Basis von E_{λ_i}, ergänze zu Basis $\mathcal{B}$ von V.

$$M = M_{\mathcal{B}}(L) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_i - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i - \lambda \end{matrix}}^{n_i} & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} -\lambda & \\ & * \ddots \end{matrix} \end{array}\right)$$

In $P_L(\lambda) = \det(M - \lambda E)$ kommt der Faktor $(\lambda_i - \lambda)$ mind. n_i mal vor.

(Entwicklung, ZSF, Leibniz

$$\det B = \sum \pm \underbrace{b_{1\pi(1)}}_{} \cdots b_{n\pi(n)} \quad \overset{(\lambda_i-\lambda)(\lambda_i-\lambda)}{}\Big)$$

$\square$

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $s \neq 0$

$\{EWe\} = \{1\}$, $E_1 = \operatorname{span}(e_1)$

$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, $g_A(1) = 1$

$a(1) = 2$

5.20 Korollar Allg $\sum_\lambda a(\lambda) = n = \dim V$

Und L diag.bar $\Leftrightarrow$ $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ $\forall j = 1, \dots, l$

Bew L diag.bar $\Leftrightarrow$ $\sum_j g(\lambda_j) = n = \sum a(\lambda_j)$

$g(\lambda_j) \le a(\lambda_j) \Rightarrow$ Beh. $\square$