5.22 Satz von Cayley-Hamilton

Sei V $\mathbb{K}$-VR, $\dim V = n < \infty$,

$L \in \mathcal{L}(V)$, $P_L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k$

char. Poly.

Dann ist $P_L(L) = 0$.

D.h. $\sum_{k=0}^{n} c_k L^k = 0$.

<u>Beweis</u> für diag.bares L

(für nicht-diag.bares L: später)

Sei $\mathcal{B}$ Basis aus EVen,

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}}(L^k)}_{(M_{\mathcal{B}}(L))^k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(P_L(L)) = \sum_{k=0}^{n} c_k \left(M_{\mathcal{B}}(L)\right)^k$$

$$= \begin{pmatrix} P_L(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P_L(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0. \qquad \square$$

Korollar $E, L, L^2, \dots, L^n$
sind lin. abh. in $\mathcal{L}(V)$

$E, A, A^2, \dots, A^n$, $A \in M(n,K)$
sind lin. abh.

$\dim \mathcal{L}(V) = \dim M(n,K) = n^2$.

Bsp Sei $c_0 = \det L \neq 0$, dann

$$\sum_{k=1}^{n} c_k L^k = -c_0 E$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{n} c_k L^{k-1} = \underline{\underline{L^{-1}}}$$

Bsp $L^n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} c_k L^k$

$$L^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k L^k$$